様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月１２日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：１９５４００１１
研究課題名（和文）　頂点作用素代数の表現論における新展開とその応用に関する研究

研究課題名（英文）　New developments in representation theories of vertex operator algebras and their applications

研究代表者
松尾　厚（MATSUO　ATSUSHI）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20238968

研究成果の概要：頂点作用素代数 V の表現を調べるために，高次 Zhu 代数と呼ばれる非可換環上の加群を V の表現に持ち上げる際に用いられる加群の表現論的な構成方法を考案した。また，頂点作用素代数のフィルター付けやリーマン面上の共形場理論の構成に必要となる複素幾何的な諸結果を整理し，一定の知見を得た。さらに，共形デザインの概念と頂点作用素代数の対称性との関係を論じ，頂点作用素代数の更なる研究への手がかりを得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,800,000	540,000	2,340,000
２００８年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数一般・頂点作用素代数

１．研究開始当初の背景

(1) 頂点作用素代数は，1986 年に定式化されたある種の代数系であり理論物理学の模型の一つである二次元共形場理論に現れる作用素積展開の概念を抽象化したものと捉えることができる（[Bo]，[FLM]）。頂点作用素代数 V に対して，その表現（あるいは V-加群）の概念が定義される。頂点作用素代数の既約表現の同型類の集合は Zhu 代数と呼ばれる非可換環 A(V) の既約加群の同型類の集合でパラメトライズされる。また，これを精密化した高次 Zhu 代数 An(V) の理論も重要である（[DLM]）。

頂点作用素代数 V の表現のなすアーベル圏が半単純であるとき，頂点作用素代数 V は有理的であると呼ばれる。一方，頂点作用素代数 V に対して Zhu の有限性条件と呼ばれる条件が知られている（[Zh]）。有理的な頂点作用素代数 V が Zhu の有限性条件を満たすとき，V の表現の指標はモジュラー不変性を示すなど，良い性質を持つことが知られている。

最近では有理性を仮定せずに Zhu の有限性条件だけから重要な結論を得ようという方向で盛んに研究が進められている。特に，その方向で共形場理論を構成し，それを利用してモジュラーなテンソル圏の理論への応用を得ることは重要な課題である。研究代表

者は，共同研究者とともに，このような観点を念頭に置いて研究を進めてきた。
(2) このような状況のもと，2006 年までに，頂点作用素代数の理論にいくつかの新展開があった。実際，研究代表者らは予稿 [MNT] において，頂点作用素代数の普遍展開環を利用して適切な表現の圏を定式化し，それがアーベル圏として良い性質を持つために頂点作用素代数が満たすべき有限性条件を普遍展開環の言葉で与えることに成功した。さらに，この有限性条件の下で，普遍展開環から有限次元代数の帰納系を標準的に構成し，頂点作用素代数の表現の圏とこうして得られた有限次元代数の上の加群の圏が圏同値になることを示した。
(3) その後，カリフォルニア大学サンタクルズ校の Dong 氏らは，若干の追加的な条件の下で，頂点作用素代数が有理的であるための必要十分条件は Zhu 代数が半単純となることであるとする共同研究の予稿 [DJ1] を発表した。この Dong 氏らの研究においては，高次 Zhu 代数 An(V) の上の加群をテンソル積によって V 加群に持ち上げるため，ある (Am(V),An(V)) 両側加群が構成されている。この研究を [MNT] のように頂点作用素代数の普遍展開環の枠組みでとらえ直すことにより，より一般的な理論を構築できるのではないかと強く期待された。
(4) 上記とは趣が異なるが，内在的に関連があると考えられるいくつかの新展開もあった。その一つ目は，研究代表者が 2001 年に発表した論文 [Ma] で考案した方法を改良し一般化する研究 [Tu] および [Ho] であり，二つ目はムーンシャイン加群の一意性をやや強い条件下で証明する研究 [LY] であり，最後の三つ目は，モンスター以外の散在型単純群を「構造を持つ」頂点作用素代数の自己同型群としてとらえ，そのムーンシャイン現象を調べる研究 [Du] である。

２．研究の目的

本研究は，上記のような新しい方法論に基づいて，頂点作用素代数の表現論をさらに発展させ，それによって，関連する諸概念を整理統合し，未解決の問題に対するアプローチを探ることを目的とする。

具体的には，Dong 氏らが構成した両側加群を，普遍展開環を利用して再構成し，頂点作用素代数の有理性と Zhu 代数の半単純性の間の関係について，自然な形で理解することを目指す。

このほか，文献 [Ma]，[Ho]，[Tu]，[LY]，[Du] で行われた諸研究の相互の関係を調べ，未解決問題の解決への糸口を得ることを目指す。

これらの研究は一見すると互いに何の関係もないようにも見えるが，そもそも研究代表者のかつての研究 [Ma] の動機の一つはムーンシャイン加群の一意性予想への取り組みにあり，またいまひとつはモンスター以外の興味深い群を自己同型群に持つような頂点作用素代数を探す試みにあった。そして，研究 [LY] において，頂点作用素代数のテンソル積の理論が有効に用いられているのである。こうした事情に鑑みれば，これらの研究には何らかのつながりがあると考えるのが自然である。

３．研究の方法

(1) Dong 氏らの構成した (Am(V),An(V)) 両側加群の普遍展開環を利用した再構成を行うため，論文 [DJ1] を読み解き，Dong 氏らの加群と研究代表者らが論文 [MNT] で与えた幾つかの加群とを比較した。また，[DJ1] で用いられた加群の別構成を探った。さらに，有理性と Zhu 代数の半単純性との関係についての考察を行った。その際には，有理性が問題となる具体例の筆頭であるW代数についての考察するため，有理性についての研究を進めてきた連携研究者の安部利之氏や，W代数の専門家である連携研究者の荒川知幸を交えて議論を重ねながら考察を行った。
(2) 頂点作用素代数の有理性と Zhu の有限性に関する統一的な理論の構築を目指して予稿 [DJ2] を読み解き，論文 [MNT] で行った構成法との比較検討を行った。さらに，安部氏は Zhu の有限性条件を満たすが有理的ではない頂点作用素代数の例について研究しているので，安部氏とともに [DJ2] の結果に対する反例の探索を行った。
(3) Zhu 氏によって与えられて広く流布している有限性の定式化では，有限性条件は頂点作用素代数のある種の商空間の有限次元性としてとらえられている。しかし，この形では物事の本質をとらえにくいという欠点があるので，カイラル代数に関する書籍 [BD] などの関連する文献を読み解きつつ，本研究の方法論との関係を探った。そのため，この問題に関心を持っている連携研究者の荒川知幸氏と打合せを行った。その結果，普遍展開環のフィルター付けのとり方を変えて得られる結論を探ることが重要であると考えられたので，ポアソン代数やシンプレクティック幾何学などの方法論を調査しつつ，本研究の方法論との関係を探った。
(4) 連携研究者の永友清和氏と議論を重ねつつ，頂点作用素代数に附随するリーマン面上の共形場理論を構成するために必要となる諸結果について検討を加えた。また，カリフォルニア大学サンタクルズ校の Geoffrey Mason 氏とアイルランド国立大学ゴールウェイ校の Michael Tuite 氏を招聘し，彼らの研究手法との比較を行った。
(5) カンザス州立大学の Gerald Hoehn 氏を

招聘し，Tuite 氏による頂点作用素代数の公理をシステマティックに用いる計算方法とHoehn 氏による共形デザインの概念とを組み合わせることによって，対称性の高い頂点作用素代数に関する研究代表者が論文 [Ma] で得た研究成果の一般化と精密化に取り組んだ。また，Tuite 氏招聘の機会を利用するとともに，台湾国立成功大学の林正洪氏を訪問し，愛知教育大学の山内博氏とも議論を行うなどして，論文 [Ma]，[Tu]，[Ho] の基礎となる概念を比較し，具体的な頂点作用素代数への応用を試みた。

４．研究成果

(1) 研究代表者は Dong 氏らが [DJ1] で構成した(Am(V),An(V)) -両側加群の普遍展開環 U(V) による構成方法ならびに表現論的な構成方法を得た。ここで，表現論的な構成方法は次のようなものである。すなわち，高次 Zhu 代数 Am(V) に対して，ヴェルマ型の V -加群 Mm(Am(V)) を考え，その n 次斉次成分から m 次斉次成分への線型写像であって，V の作用から来るもの全体のなす空間を考える。すると，これらをうまく直和したものがしかるべき普遍性を持つことがわかるので，ここれによって Dong 氏らの加群が得られたことになる。

このことは，Dong 氏らが論文 [DJ2] で行った議論が，(Am(V),An(V)) -両側加群の具体的な構成方法にはよらず，既知の表現論に基づいて行われ得るものであることを示しており，論文 [DJ2] の理論展開の本質を理解することにつながったと考えられる。

(2) 連携研究者の安部利之は，頂点作用素代数の上の加群に附随する両側加群の高次 Zhu 代数の場合への一般化を行った。

これを普遍展開環の見地から記述して応用することは，研究代表もすでに試みているところであるが，引き続き研究を進めていく必要がある。

(3) 連携研究者の荒川知幸は，ある種のフィルター付けが，頂点作用素代数上では異なるが，普遍展開環にまで持っていくと同じになることを見いだした。また，頂点作用素代数の有限性の定式化についても一定の知見を得た。

これらは頂点作用素代数の理論における基本的な研究成果であって，フィルター付けや有限性条件の代数的な性質とリーマン面上の共形場理論の構成との整合性を調べることが今後の課題となる。

(4) 研究代表者は連携研究者の永友清和と協力して，頂点作用素代数に附随するカレント・リー代数をリーマン面上で構成するために必要となる複素幾何的な知見を整理した。また，加群に附随する余真空の層の連接性を考察するために必要となる複素幾何学的な知見を整理した。

ここで得た知見は新しい結果ではないが，リーマン面上の共形場理論を論ずる際に明記された文献は見当たらず，あるいは見過ごされてきた論点であるようにも思われ，今後の研究につながっていくことが期待される。

(5) 研究代表者は愛知教育大学の山内博氏と協力して，研究代表者が [Ma] で定式化した概念ならびに Tuite 氏が [Tu]で用いた概念と Hoehn 氏が定式化した共形デザインの概念の間の関係を明確にした。

これは，古典的なデザインの理論や球面上のデザインの理論で知られている諸結果の頂点作用素代数における類似を考える際に有用となるものと思われる。

(6) 研究代表者は，連携研究者の荒川知幸氏との打ち合わせを通じて，W代数と有限W代数の関係を念頭におき，有限W代数における諸結果の頂点作用素代数における類似が成立するかどうかに注意して研究を進めてはどうかとの示唆を得た。それには，シンプレクティック幾何学を援用しつつ研究することが重要となってくるように思われる。この点については，継続して研究を実施し，発展させていきたいと考えている。

参考文献

[Bo] R.E. Borcherds: Vertex algebras, Kac -Moody algebras, and the Monster. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83, (1986), 3068 -3071

[BD] A. Beilinson and V. Drinfeld: Chiral algebras. American Mathematical Society Colloquium Publications, 51. American Mathematical Society, Providence, 2004.

[DJ1] C. -Y. Dong and C. Jiang : Bimodules associated to vertex operator algebras. Math. Z. 259, (2008), 799–826.

[DJ2] C. -Y. Dong, C. Jiang: Rationality of vertex operator algebras. Preprint, math.QA/0607679.

[DLM] C. -Y. Dong, H. -S. Li and G. Mason: Vertex operator algebras and associative algebras. J. Algebra 206 (1998), no. 1, 67 --96.

[Du] J.F. Duncan: Moonshine for Rudvalis's sporadic group I. Preprint, math.RT/0609449.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman: Vertex operator algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics, 134. Academic Press, Inc., Boston, 1988.

[Ho] G. Hoehn: Conformal designs based on vertex operator algebras. Adv. Math. 217, (2008), 2301 --2335.

[Ma] A. Matsuo: Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator

algebra with larger symmetry. Comm. Math. Phys. 224, (2001), 565-591.
[MNT] A. Matsuo, K. Nagatomo and A. Tsuchiya: Quasi-finite algebras graded by Hamiltonian and vertex operator algebras. Preprint, math.QA/0505071.
[LY] C.-H. Lam and H. Yamauchi: A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames. Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, Art. ID rnm003.
[Tu] M.P. Tuite: The Virasoro algebra and some exceptional Lie and finite groups. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 3, (2007), Paper 008.
[Zh] Y.-C. Zhu: Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J. Amer. Math. Soc. 9, (1996), 237--302.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
(1) Tomoyuki Arakawa: Representation Theory of W-Algebras. Inventiones Mathematicae 169, (2007), 219-320（査読あり）

〔学会発表〕（計８件）

(1) Tomoyuki Arakawa: Affine W-algebras and Zhu's Poisson varieties associated with Kac-Moody vertex algebras. Algebraic Lie structures with origins in physics, 2009 年 3 月 23 日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences （イギリス）.
(2) Toshiyuki Abe: On C_2-cofiniteness of Z_2-orbifold models of vertex operator algebras. 有限群・頂点作用素代数と組合せ論, 2009 年 1 月 6 日, 京都大学数理解析研究所.
(3) Tomoyuki Arakawa: Chiral differential operators and affine chiralization of g-modules. Taipei Workshop in Lie Theory, 2008年12月28日, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan.
(4) Toshiyuki Abe: On representation theory for the symplectic-fermionic vertex operator superalgebra. Algebras, Groups and Geometries 2008, 2008 年 12 月 11 日, 東京大学.
(5) 荒川知幸: W代数の表現論について. 日本数学会秋季総合分科会代数学分科会特別講演, 2008 年 9 月 26 日, 東京工業大学.
(6) Atsushi Matsuo: On the transformation property of the Lie algebras associated with vertex operator algebras. International Conference on vertex operator algebras and related areas, 2008 年 7 月 10 日, イリノイ州立大学（アメリカ合衆国）.
(7) Tomoyuki Arakawa: Representations of W-algebras and affine Kac-Moody algebras. Erlangen Representation Theory Days, 2008 年 6 月 13 日, エアランゲン大学（ドイツ）.
(8) 安部利之： Frenkel-Zhu 両加群の一般化. 第 24 回代数的組み合わせ論研究集会, 2007 年 6 月 28 日, 近畿大学.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
松尾　厚（MATSUO ATSUSHI）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号： 20238968
(2)研究分担者
(3)連携研究者
永友清和
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：90172543
荒川知幸
奈良女子大学・理学部・准教授
研究者番号：40377974
安部利之
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：30380215