様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年　6 月 14 日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007 年度　　～2009 年度
課題番号：19540012
研究課題名（和文）　古典群・量子群・ヘッケ環の表現論と組合せ論

研究課題名（英文）　Representation theory (of classical groups, quantum groups and Hecke algebras) and combinatorics

研究代表者
寺田　至（TERADA ITARU）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：70180081

研究成果の概要（和文）：ロビンソン・シェンステッド対応などに代表される、ヤング盤やその一般化の間に巧妙に構成された組合せ論的な全単射を、表現論にも登場する、ベキ零行列が安定にするフラッグのなす多様体など、ある種の幾何的な対象と関連させて具体的に理解する研究が進展し、特別な場合には他の研究者の視点とも結びついて急に進んだ。その他各研究者との交流の中から、古典群・コクセター群等の表現や組合せ論に関し、これまで関わった研究と結びついて発展すると期待されるいくつかの点が示されている。

研究成果の概要（英文）：Progress has been made in the efforts to obtain concrete understanding of the combinatorial bijections that had been tactfully constructed between Young tabueaux and generalizations, of which the Robinson-Schensted correspondence is a notable example, in relation with certain geometric objects appearing in representation theory, such as the variety of flags stable under a nilpotent matrix.　A particular case was rapidly advanced with the help of viewpoints of other researchers.　In addition, exchange with various researchers has brought several points to notice in the representations of classical groups and related objects as well as combinatorics, providing prospects of further developments in connection with previously experienced research topics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数的組合せ論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード:組合せ論, 全単射, Robinson-Schensted 対応, Littlewood-Richardson 規則, Young 図形, ベキ零行列, Jordan 標準形, 旗多様体

１．研究開始当初の背景

R. Steinberg による Robinson-Schensted 対応の幾何的な意味づけ，具体的には

Steinberg 多様体と呼ばれる代数多様体の既約成分の2通りのパラメトリゼーションの間の全単射としての意味づけに刺激され，寺田はR. Stanley, S. Sundaram, T. Robyによるいわゆる updown tableau version の Robinson-Schensted 型対応の意味づけを，Steinberg 多様体の素人っぽい類似物を用いて行っていた．一方，P. Trapa は表現論的な動機から，T. Springer による一般化された Steinberg 多様体(ある対称空間に付随する，Steinberg多様体の玄人による類似物)を用いて，通常のものとは異なる Robinson-Schensted 型対応を導いていた．
寺田の多様体も，素人っぽいとは言え同じ対称空間と関係してはいた．しかも両者をよく比較すると，ある意味で同じ集合の間の異なる全単射が得られるようであった．反対意見もあったが，Robinson-Schensted 対応のような自然なものは，2 つの全く別のものが構成されるとは考えがたいという専門家もあり，2 つの全単射の間の関係を解明したかった．しかしなかなか進まないため，オリジナルの Steinberg の意味づけの背景にある2つの Borel 部分群の共通部分に含まれるベキ零行列の中で最も普通の Jordan 標準形を決める部分を，E. Gansner と M. Saks が有向グラフのことばに拡張した結果に着目し，これに対称空間の場合に合うような対合を併せ考えることによって2つの全単射の意味がよりよくわかるようになるのではないかと考え，そのような結果を得つつあった．

Steinberg や N. Spaltenstein の(古い)結果に登場する，1 つのベキ零行列で安定な flag 全体のなす代数多様体についても昔から関心があり，例えば各既約成分が(いろいろな次元の)アフィン空間と同型な局所閉部分多様体への分割をもつかなど，ずっと気になっている問題があった．

２．研究の目的

表現論と組合せ論の交錯する分野を取り上げて，双方の研究者の交流を図り，両方の分野を視野に入れることによって双方に影響を及ぼし合うような成果をあげることを目的とする．特に次の 2 点を中心とするが，発展の状況によって関連するさまざまな問題を考える．

(1) Robinson-Schensted 対応と Lie 群に関係した幾何的な対象との関係から生じる，Young 図形の組合せ論的な問題．特に一般線型群をシンプレクティック群で割った等質空間と関係する一般化された Steinberg 多様体や，それに類似する多様体に関連する場合．

(2) ベキ零行列で安定な flag 全体のなす代数多様体の，さまざまな次元のアフィン空間と同型な部分集合への分割から，閉包の概念を用いた構造の探求を通じて，組合せ論的な量(おそらくは多項式)を得ること．

３．研究の方法

全体を通じ，研究の進展に資する，あるいは研究の方向の示唆を与えるような知識や知見を有する研究者との交流を積極的に図る．当方からの訪問，研究集会などの場での討議，当方に招聘しての講演依頼や討議などあらゆる機会・方法を用いる．また当方の研究の進展経過や成果について，これを示唆として受け取ってくれうるような研究者に対し必要に応じてさまざまな場面で講演や討論を行い，それを通じてさらなる進展のヒントを探る．

数学的な方法としては，研究目的の(1)に掲げた場合の研究から入る．研究開始当初に得られ始めていた Gansner と Saks の結果の２種類の拡張をよく整備し，いろいろな場合を綿密に分析して，２種類の全単射の間の不思議な関係の解明を目指し，あるいはルート系の言語による拡張の可能性を追求する．進展に応じさまざまな周辺の問題を関連させるが，(2)も常に視野に置く．

当初予定では具体化していなかったが，海外研究者との交流の中で，Littlewood-Richardson 数の対称性(形状が λ/μ で重みが ν の Littlewood-Richardson 盤と，形状が λ/ν で重みが μ のものの等数性)を実現する全単射を，R. Steinberg や M. van Leeuwen 流の代数多様体の既約成分の２通りのパラメトリゼーションの間の対応として，Hall 多項式と深く結びついた代数多様体を用いて記述する問題が浮上したので，これに取り組む．

４．研究成果

以下では Littlewood-Richardson の２氏の名を関する名前が頻出するので，これを LR と略す．

サイクルのない有向グラフ G と，G の部分自己反同型 σ (G の頂点集合の部分集合 Z の位数２の置換で G の矢の向きに合致する Z の元の順序対を G の矢と逆向きの順序対に映すもの)があるとする．G の頂点集合を行・列の添え字とする行列で，G の各矢の始点を行番号，終点を列番号にもつ成分以外はすべて０のもの(ベキ零行列の特別なもの)で，さらに σ から決まる対称性・半対称性の条件(細部は省くが，動機となっている対称空間に関連する記号に由来するペー型，カー型の２種類があり，その一方を選ぶ)をみたすもの全体の中で，最も普通な(すなわち次元の小さい

例外を除く大部分の元が共通にもつ）Jordan 標準形を記述する結果の整備がほぼ終了した．研究期間内に論文投稿に到っていないが，残っているのは展望・旧結果の幾何的部分との関連の記述等のみである．2 つの国際集会で発表し，特に KAIST での集会では参加者の B. Sagan から，この結果の雛形（σがない場合）を与えた Gansner と Saks の結果のさらなる源流である C. Greene の結果（半順序集合の場合）にさかのぼる歴史的背景を想起したうれしい発言があった．他に国内外のセミナーで報告した．

この結果の動機となっているのも，Robinson-Schensted 型の対応を代数多様体の既約成分の 2 通りのパラメトリゼーションの間の対応として記述するタイプの旧結果，およびそれに類似する（より正統的な）Trapa の結果であるが，他の研究者との交流の中で何度も聞いたある問題が，この種の記述によって解かれる問題であるとの理解が突然発生し，かなり進んだ．

それは O. Azenhas から，離散付値環上の 2 つの正方行列 A と B の Smith 標準形（単因子）と，その積 AB の Smith 標準形との関係に関する話を雑談として聞いたときから始まる．そのときは何の話かよくわからなかったが，2008 年の FPSAC という集会での講演で LR 数の対称性を与える全単射を上述の行列の問題と結び付けようとしていることを知り，この問題は Hall 多項式で数えている集合を代数的閉体上で考えた代数多様体の話に持ち込めること，さらに前に気にとめたことのある，その代数多様体の既約成分の問題として解けるに違いないと確信した．共同研究も視野に入れてその準備を話し合ったがなかなか共通の土俵が作れず，2009 年 2 月に先方を訪問した際，当方の見解がやや異様に受け取られながら，とりあえず私が考えることに対する承認を受けた．

背景として，離散付値環すなわち同伴を除き唯一の素元をもつ単項イデアル整域 R で，剰余体が q 元体であるもの（q は素数のベキ）を固定すると，長さ有限の R 加群の同型類は自然数の分割と 1 対 1 に対応する．この分割を R 加群の型と呼ぶ．分割λと型がλの R 加群 M を固定し，M の部分 R 加群 N で N の型が分割ν，商 R 加群 M/N の型が分割μであるものの個数は，λ，μ，νで決まる Hall 多項式と呼ばれる多項式に q を代入したものになる．また Hall 多項式の最高次の係数はλ，μ，νに対する LR 数に一致する．このことは P. Hall に始まり，J. Green，T. Klein などが導いたことで，I. Macdonald の著書 Symmetric Functions and Hall Polynomials にも解説されている．これを学んで間もないころ，R として複素数体上の 1 変数ベキ級数環をとれば，このような部分 R 加群 N 全体は複素数体上の代数多様体をなし，この多様体は LR 数個だけの互いに等しい次元の既約成分をもつということに違いないと思ったが，当時この本に詳しい人にそれを言ったらどしてと言われたから，そこまで自明と思われることではなかったのかもしれない．

そこでこれを機会にこれをまじめに考えた．上の代数多様体を仮に（正確には余型μ，型νの M の）Hall 多様体と呼ぶ．抽象的には M を同じ型の R 加群で置き換えても多様体として同型である．少し注意を要する点があったが，本質的にはこの本の内容からこの Hall 多様体の既約成分に関する主張を導くことができる．特に，Green などの方法で上のような各 N に対応する形状λ/μ，重みνの LR 盤を仮に N の転置余型列盤と呼び，転置余型列盤が特定の LR 盤 T となるような N 全体を仮に T の定める LR 部分多様体と呼ぶと，各 T の定める LR 部分多様体は Hall 多様体の滑らかな局所閉既約部分代数多様体で，T の如何にかかわらずλ，μ，νだけで決まる次元を持ち，T が形状λ/μ，重みνの LR 盤全体を動くとき，Hall 多様体の点全体は T の定める LR 部分多様体にもれ・重複なく分割される．このことより，各 T の定める LR 部分多様体の（Hall 多様体内での）閉包全体が Hall 多様体の既約成分全体となる（T ごとに異なる既約成分になる）．

さらに，M のベクトル空間としての双対空間 M*も自然に R 加群となり，M の各部分 R 加群 N に対し N⊥も M*の部分 R 加群となり，特に余型μ，型νの M の Hall 多様体から，余型ν，型μの M*の Hall 多様体への同型を生ずる．これによって前者の各既約成分は後者の各既約成分に映り，それぞれがどの LR 盤の定める LR 部分多様体の閉包かを見ることにより，形状λ/μ，重みνの LR 盤全体から形状λ/ν，重みμの LR 盤全体への全単射Φを生ずる．一般に同じ型の R 加群 M から M'への R 同型が定める M の Hall 多様体から M'への Hall 多様体への同型は，各 LR 盤 T の定める LR 部分多様体を同じ LR 盤 T の定める LR 部分多様体に映すから，Φは分割λ，μ，νだけで決まる．このΦが Azenhas が組合せ論的に記述した同じ集合の間の全単射と一致することを示すための重要なステップを示すことができた．

さらに，一般には LR 盤 T の定める LR 部分多様体のすべての元 N に対し N*が転置余型列盤Φ(T)をもつわけではなく，この性質を持つ N は T の定める LR 部分多様体の（開かつ稠密な部分集合を含む）部分集合である．ここでは LR 部分多様体の開かつ稠密な部分集合であって，そのすべての元 N に対し N*が転置余型列盤Φ(T)をもつものが，間接的ながら得られたことになる．Azenhas は（たった 1 つ

でも構成できればいいと言っていたが)これと同値なことを行列の形で問うていたことになる．当方の見解が異様に受け取られたのは，この除外集合は複数の既約成分の交わりに含まれる部分であり，それは全体から見るとMの自己同型に左右されない非常に特性度の高い部分なので，むしろ好ましい性質を持ついい点としてはそういうものから選ぶほうが自然に思えたからだと思われる．

今後この結果を最後まで推し進めることが急がれるとともに，次のような関連する問題が考えられる．Azenhas の全単射には等価な記述がいくつかあり，その中で例えば Benkart-Stroomer の tableau switching を用いた記述は，van Leeuwen により何らかの代数多様体の既約成分の間の全単射と関連付けられている．これらの結果との関係は今後調べる必要がある．現在の印象では，van Leeuwen はこのような多くの全単射を互いに関連させて意味づけているが，その記述は多数のステップを含むことになり，今回のわれわれの記述はかなり直接的であるために具体的な非除外部分の記述も可能だったものと思われる．

これ以外に，招聘した研究者や研究集会等で交流する機会のあった研究者との討論から，古典群や Coxeter 群等の表現・組合せ論に関し，これまで関わった研究と結びついて発展すると期待されるいくつかの点が示された．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 小林俊行，Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, Progr. Math. Vol. 255, 2007, 45-109.

② 岡田聡一，行列式・パフィアンに関する等式とその表現論，組合せ論への応用，数学 62 (2010) 85-114.

〔学会発表〕（計２件）

① 寺田至，The Jordan types of certain nilpotent matrices, 2009 NIMS Hot Topics Workshop on Algebraic Combinatorics, 2009 年 12 月 15 日，韓国テジョン市 KAIST (韓国科学技術院)

② 寺田至，Jordan types of certain nilpotent matrices，アメリカ数学会 2009 年秋季南東地区大会，2009 年 10 月 30 日，アメリカ合衆国フロリダ州ボーカラトーン市フロリダ大西洋大学

６．研究組織

(1)研究代表者

寺田　至（TERADA ITARU）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：70180081

(2)研究分担者

(3)連携研究者

小池　和彦（KOIKE KAZUHIKO）

青山学院大学・社会情報学部・教授

研究者番号：70146306

田中　洋平（TANAKA YOHEI）

東京海洋大学・海洋工学部・教授

研究者番号：00135295

小林　俊行（KOBAYASHI TOSHIYUKI）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80201490

岡田　聡一（OKADA SOICHI）

名古屋大学・大学院多元数理・教授

研究者番号：20224016