

研究種目：	基盤研究 (C)
研究期間：	2007~2008
課題番号：	19540014
研究課題名 (和文)	フロベニウス多元環の構造と加群圏の代数的性質との関係に関する研究
研究課題名 (英文)	Research on algebraic properties of categories of modules and structures of Frobenius algebras
研究代表者	
	山形 邦夫 (YAMAGATA KUNIO)
	東京農工大学・大学院共生科学技術研究院・教授
研究者番号：	60015849

研究成果の概要：多元環の構造とその上の加群の成す圏について研究を行い、加群の直既約部分加群の直和分解と加群の準同型環との関係や、Cohen-Macaulay 加群の分類、有限次元群多元環の Frobenius 多元環としてのカルタン行列の持つ性質、加群圏の被覆理論の拡張と応用などについて多くの成果を上げた。これらの諸成果は本研究組織の各研究者によって国内外の国際研究集会やシンポジウムなどで発表され専門雑誌に掲載された。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環、多元環、加群、表現、圏、クイバー

1. 研究開始当初の背景

加群圏の代数的性質と多元環の被覆との関係や Cohen-Macaulay 加群の分類、Frobenius 多元環に付随する行列の性質など本研究組

織の研究者によってそれぞれ研究が行われてきたが、未解決の多くの問題の解明には様々な立場からの知見が必要であり、このために一つの研究組織として研究体制を整え

て情報交換や検討を行うことが重要であると認識されるようになった。

2. 研究の目的

多元環の加群圏やFrobenius多元環などについて主に次の点の解明を目的とする：

- (1) 被覆を持つ Frobenius多元環や有限群の成す群多元環などについて、カルタン行列式やイデアルなどによる環としての構造
- (2) 多元環上の部分加群圏の代数的性質や多元環との関連

3. 研究の方法

本研究組織の研究者間の討論や打ち合わせ、情報交換などために、所属大学訪問やシンポジウム、各種学会の場などを利用した。おもな研究集会は次の通りである。

- (1) 第5回日中韓環論シンポジウム(日本(2007))
- (2) 環論および表現論シンポジウム
- (3) 可換環論シンポジウム
- (4) 代数的組み合わせ論シンポジウム
- (5) 日本数学会年会、
日本数学会秋季総合分科会
- (6) 静岡大学代数セミナー
- (7) 多元環の表現論国際会議(ポーランド(2007)、ブラジル(2008))

このほか国内外で開催された多くの研究集会にも参加し、発表や討論を通して本研究組織外の研究者との情報交流や情報収集を行った。また、海外研究協力者 A. Skowronski を東京農工大学に招聘し農工大学や京都大学数理解析研究所での講演などの機会を利用して分担者や連携研究者と打ち合わせや討論、情報交換を行った。

4. 研究成果

研究の目的とする多元環や部分加群圏の構造、代数的性質などについて、研究組織の各研究者それぞれを中心とした具体的な課題について研究を行い、下記のような成果を得た。

- (1) 加群の直和分解問題と Frobenius 多元環上の加群圏の研究について(山形邦夫)
多元環とその上の加群の成す圏の代数的

構造について、特に Frobenius 多元環を主として研究を行った。圏の代数的性質は対象間の射の性質によって決まるが、局所的には対象自身の射、すなわち準同型多元環の性質による。この観点から、必ずしも有限次元ではない加群の準同型多元環で Frobenius 多元環の持つよい性質を有するものについて考察した。その結果、Frobenius 多元環の場合には根基と一致して隠れてしまうイデアルを抽出し、このイデアルに関する剰余多元環の(von Neumann) 正則性とベキ等元の持ち上げについて、射による特徴付けを与えた。これにより、これまで知られていた入射加群の準同型多元環についての Faith, Utumi 他による有名な古典的定理を一般化することに成功した。この成果は、(無限個の) 直既約部分加群の直和への分解に関する Krull-Remak-Schmidt-Azumaya の定理(KRSA の定理)に深く関係していることがわかり、この定理に関する「任意の直和因子が再び直既約部分加群の直和に分解可能であるか」という古くからの未解決問題について新たな展開が期待される。この定理の応用として、直既約部分加群の直和に分解可能な加群が有する新たな性質を発見し、その性質をもつ実例として自己入射多元環上の加群を構成した。これらの研究(KRSA の定理の特殊な場合である) Matlis の問題への新たな側面を提示している。これらの研究の結果、分解問題の解決のためには、入射加群の無限直和の準同型多元環に対して正則性とベキ等元持ち上げに関する研究成果をさらに発展させることが今後の基本的な研究課題となることが明確になった。一方、Frobenius 多元環の構造と表現圏に関する研究を海外研究協力者 A. Skowronski と長年にわたり継続して行ってきた結果これまで多くの成果が得られ、これらの研究成果と今後の新成果とを国内外に広く公開し今後の研究への資料として提供することが重要であると判断し、これらの成果を単行本として出版することを企画した。そのために Skowronski を招へいして成果の見直しや改良の検討を行い本の執筆に取り掛かった。ヨーロッパ数学会出版局から出版されることになった。

(2) 部分加群圏の研究と可換環上の加群の研究について (吉野雄二)

Cohen-Macaulay 加群の分類論問題を中心とした研究を行い, Auslander-Reiten-Serre 双対性を有する三角圏において n -クラスターティールディング部分圏の mutation を定義して, その一般論を展開した (伊山修との共同研究)。その結果として, ある種の Veronese 部分環上の rigid な Cohen-Macaulay 加群の完全な分類に成功した。この結果はその手法も含めて, 伊山修の高次元 Auslander-Reiten 理論を補足するものとして国内外から注目を集めている。また, 可換環上の加群の理解に不可欠な局所コホモロジー理論を今までとは違った視点から展開し, 台として必ずしも閉集合とは限らない部分集合をもつ局所コホモロジーの概念を導入し, その精密な解析を行なった。加群の変形理論については, 非可換なパラメータを有する普遍変形族の構成に成功し, それを各種のコホモロジー代数に応用した。

(3) 有限次元群多元環の環構造の研究について (和田俱幸)

一部の p -可解群の p -ブロック, 巡回ブロック, 順ブロック等について, それらに付随する固有値や固有ベクトルについて研究を行った。これらのブロックに対して最大固有値が整数ならば, それはブロックの不足群の位数に一致し, 固有値はすべて整数で, 固有値の集合と, 単因子の集合とは一致することはすでに和田自身によって証明されていたが, この研究を継続して本研究ではさらに, 固有ベクトルとして, ある部分群や商群のブロックに属する既約 Brauer 指標の値ベクトルがとれることを示した。さらに, $p=2, 3$ の場合には, 主ブロックで不足群がアーベル群のときには, カルタン行列の最大固有値が整数であれば, 与えられた群の構造が決まってしまうことを明らかにした。いずれも, 代数学における重要な雑誌である Journal of Algebra に掲載され, レフェリーから驚きの結果であると評価された。今後はこの結果が一般の素数 p について成り立つことの証明を探ることが課題となる。

(4) 加群圏の被覆理論の研究と応用の研究 (浅芝秀人)

群 G からの作用を持つ圏 (G 圏と略称) を対象とし, G 圏の間の弱 G 同変関手を射とする圏を G -Cat とおき, G 次数付き圏を対象とし, その間の次数を保つ関手を射とする圏を G -GrCat とおく。 C から軌道圏 C/G を取る操作を G -Cat から G -GrCat への関手に一般化し, B から B と G によるスマッシュ積を取る操作を G -GrCat から G -Cat への関手に一般化し, これらが互いに擬逆であることを示した。これらの操作が互いに擬逆となることは, G の作用が自由作用であるという仮定の下で Cibils と Marcos によって示されていたが, 今回の結果は自由作用の仮定を必要としない。またこの結果は, 有限群と単一の対象からなる圏としての環に特殊化すると Cohen-Montgomery 双対性を与える。すなわちこれら既存の結果を一般化するものとなっている。また今回の結果から, G 被覆関手のスマッシュ積による特徴付け, 任意の作用を自由作用に弱 G 同変に変形する方法, および自然同値を法とする自己圏同値で生成される巡回群による軌道圏を直接構成する方法が得られる。さらに C から B への G 被覆関手 F があるとき, F から導かれる標準的な関手を用いて, C 加群の圏と B 加群の圏が, 互い他を記述するという結果も与えた。この一般化された被覆理論は今後, 導来同値の証明やホール代数の計算等に, 扱いやすい道具として応用されるものと期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① R. Takahashi, Y. Yoshino and T. Yoshizawa, Local Cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals, J. Pure and Appl. Algebra, vol. 213 (2009) 582--600, 査読有
- ② S. Nasseh and Y. Yoshino, On Ext-indices of ring extensions, J. Pure and Applied Algebra, vol. 213 (2009), 1216--1223, 査読有
- ③ K. Yamagata, Modules with semiregular endomorphism rings, Colloquium

- Mathematicum, vol. 113 (2008), 241-250
- ④ J. Bialkowski, A. Skowronski and K. Yamagata, Cartan matrices of symmetric algebras having generalized standard stable tubes, Osaka Journal of Mathematics, vol. 45 (2008), 159--171
- ⑤ A. Skowronski and K. Yamagata, Selfinjective algebras of quasitilted type, Trends in representation theory of algebras and related topics, 2008 年, pp. 639-708, 査読有
- ⑥ Osamu Iyama and Y. Yoshino, Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, Inventiones Mathematicae, vol. 172 (2008), 117--168, 査読有
- ⑦ Y. Yoshino, Universal lifts of chain complexes over non-commutative parameter algebras, J. of Math of Kyoto Univ., vol. 48 (2008), 793-845, 査読有
- ⑧ N. Kunugi and T. Wada, Eigenvalues of Cartan matrices of principal 2-blocks with abelian defect groups, J. Algebra, vol. 319 (2008), 4404-4411, 査読有
- ⑨ H. Asashiba, Domestic canonical algebras and simple Lie algebras, Math. Z. vol. 259 (2008), 713-754, 査読有

[学会発表] (計 22 件)

- ① 吉野 雄二, Auto-equivalences of additivefull subcategories, 第 4 回日本—ベトナム合同セミナー、2009 年 2 月 17 日—21 日、明治大学 (生田)
- ② 和田 俱幸, Eigenvalues of Cartan matrices of principal 2-blocks with abelian defect groups, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学
- ③ 吉野 雄二, Oicard groups and automorphism groups of categories, 第 41 回環論および表現論シンポジウム、2008 年 9 月 5 日—7 日、静岡大学
- ④ 浅芝 秀人, Covering functors, orbit categories and derived equivalences, XII International Conference on Representations of Algebras, 2007 年 8 月 23 日, Nicolaus Copernicus University, Poland.
- ⑤ 浅芝 秀人, Skew monoid categories and derived equivalences, XIII International Conference on Representations of Algebras, 2008 年 8 月 8 日, Sao Paulo, Brazil
- ⑥ 吉野 雄二, Deforming a chain complexes to non-commutative direction, International Conference toward establishing a cutting-edge platform for commutative ring theory in the 21st century, 2008 年 3 月 17 日—21 日
- ⑦ 山形 邦夫, On lifting of idempotents in the endomorphism ring of a module, 第 5 回日中韓「環論」国際シンポジウム, 2007 年 9 月 11 日, 国立オリンピック記念青少年総合センター (東京)
- ⑧ 吉野 雄二, 非可換パラメーターを基準にした鎖複体の普遍持ち上げ、第 52 回代数学シンポジウム、2007 年 8 月—9 日、神戸大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山形 邦夫 (YAMAGATA KUNIO)
東京農工大学・大学院共生科学研究所・教授
研究者番号：6 0 0 1 5 8 4 9

(2) 研究分担者

吉野 雄二 (YOSHINO YUJI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：0 0 1 3 5 3 0 2

(3) 連携研究者

和田 俱幸 (WADA TOMOYUKI)
東京農工大学・大学院共生科学研究所・教授
研究者番号：3 0 1 3 4 7 9 5
浅芝 秀人 (ASASHIBA HIDETO)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号：7 0 1 7 5 1 6 5