様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月１９日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19540017
研究課題名（和文）　３次元代数多様体の間の双有理射に関する研究

研究課題名（英文）　Studies on birational morphisms of 3-dimensional Algebraic varieties

研究代表者
早川　貴之（HAYAKAWA TAKAYUKI）
金沢大学・数物科学系・講師
研究者番号：20198823

研究成果の概要（和文）：
３次元代数多様体の因子的収縮射に関して，指数が１の３次元端末特異点のうち，ｃD 型およびｃE 型のものについて，その上空にある食い違い係数が１の既約因子をすべて見つけた．この一部分として，ｃD 型およびｃE 型の３次元端末特異点につぶれる因子的収縮射の大部分を見つけることができた．

研究成果の概要（英文）：
I obtained the following results concerning divisorial contractions of 3-dimensional algebraic varieties: I found all irreducible divisors with discrepancy one over the 3-dimensional terminal singularities of type cD and cE. As a consequence, I found the most part of divisorial contractions contracting to singularities of type cD and cE.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007　年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008　年度	800,000	240,000	1,040,000
2009　年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：代数幾何
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：端末特異点，因子収縮

１．研究開始当初の背景

３次元代数多様体の因子的収縮射の中で，既約な因子 E を１点 P につぶすようなもの f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) のうち，P ∈ X の指数が２以上，E の食い違い係数が１以下となるものをすべて分類してあった．(Takayuki Hayakawa, Blowing ups of 3‐dimensional terminal singularities , Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, II, および Divisorial contractions to 3‐simensional terminal singularities with discrepancy one)．これらは，方程式と巡回群の作用を使って具体的にかかれたＰ∈Ｘの記述を使って，変数変換などをして４次元または５次元の巡回商特異点に埋め込んでおいて，適当な重みを与えて重み付きの blowing up を実行することによって得られていた．さらに食い違い係数が最小とは限らない Ｐ ∈ Ｘ 上空の既約因子についての情報も数多く得ていた．また川北による general elephant の存在はこの分野における重要な結果であり，この結果の応用は関連する研究の推進において欠かせないものであった．

２．研究の目的

高次元代数多様体の極小モデルプログラムの主たる目標は，各々の射影多様体 X について，X と双有理同値な射影多様体 X’であって，高々Q‐分解的かつ端末特異点しかもたず，次のいずれかの性質をもつものを見つけることである．

（１）X’は極小モデル,つまり K_X’がネフ,

（２）X’は森ファイバー空間の構造を持つ，つまり dim S < dim X’なる射影多様体 S への射 f：X’ → S をもち，－K_X’が f‐豊富となる．

３次元においては，極小モデル理論は 1980 年代に完成し，その後，与えられた２つの森ファイバー空間 f : X → S と f’: X’→ S’との間の双有理写像に関する研究が発展してきた．これがいわゆる Sarkisov プログラムで Corti, Reid, Pukhlikov らのよって推し進められてきた．3 次元代数多様体の有理性，たとえば４次元射影空間内の滑らかな次数 4 の超曲面が有理的でないという Iskovskii‐Manin の結果などはこの範疇の問題としてとらえることができる．

Sarkisov プログラムは， 森ファイバー空間の間の双有理写像を，elementary link とよばれる基本的な双有理写像の合成として表そうとしたものである．そしてひとつひとつの elementary link は，因子的収縮射，フリップ，フロップから成り立つ双有理写像であり，そのうち type I と type II の elementary link は因子的収縮射から始まるもので，スタートとなる因子的収縮射が決まりさえすれば，残りの構造はそれから自然に導かれるという形になっている．つまり因子的収縮射の具体的な理解は，elementary link の構造，さらには森ファイバー空間の間の双有理写像の構造の理解に直接的につながることになる．

本研究の目的は，3 次元代数多様体の因子的収縮射について，方程式，巡回群の作用，blowing up の様子などを調べることによって具体的に決定し，さらにそれらの応用としていくつかの森ファイバー空間の間の双有理写像の構造を調べることにある．

3 次元代数多様体の因子的収縮射のうち既約因子 E を 1 点 P につぶすようなもの f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) について，川北によりいわゆる general elephant が存在することが証明された．その結果を利用することで，彼は食い違い係数が大きい場合について f を具体的に表すことを実行している．一方，私は，同じ種類の因子的収縮射 f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) で食い違い係数が小さいときに，f を具体的に表してきた． 残されているのは，P の指数 2 以上のときにあっては，P が (cD/2) 型で食い違い係数が 2 のもの， P の指数が 1， つまりＰが Gorenstein 端末特異点のときにあっては，P が (cD/1) および (cE/1) 型であって食い違い係数が 4 以下のものである．これらの場合にはいくつかの例は知られてはいるが，f : (E ⊂Y) →(P ∈ X)の形の完全な決定はまだなされていなかった．

そこで本研究の目的のひとつは，まず因子的収縮射 f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) であってＰが (cD/1) 型または (cE/1) 型かつＥの食い違い係数が１となる場合について f の具体的な分類を行うことである．

この場合は P の指数が m ≧ 2 のときの食い違い係数 1/m にあたる部分であり，いくつかの複雑な場合わけを上手にすることさえできれば，f の完全な決定は可能であると考えられる．このような E が与えられた P に対して有限個しかないことが鍵であり，それらをすべて具体的に構成することができ

るはずであると考えた．さらに(cD/2) 型の場合の食い違い係数が 1/2 のものと食い違い係数が 1 のものを見比べることにより，その類似性を検討することにより(cD/1) 型で食い違い係数が 2 となるような場合， 4 となるような場合の f が具体的に決定されていくと考えられる．3 次元代数多様体の因子的収縮射のうち既約因子 E を曲線 C につぶすようなもの f：(E ⊂Y) →(C⊂X) についても C の一般点においては普通の blowing up となること，および X が指数 1 の特異点しかもたないような場合でのより具体的な 結果については知られているが，とくに X の指数が 2 以上の特異点の近くでの f の様子の完全な理解はまだ得られておらず，これらについての解明も本研究の目的のひとつであった．

これらの研究は，Sarkisov プログラムの具体的な応用に直接結びつくものであり，それらを研究している研究者の何人かから期待されていることでもあり，早い時期での完成が特に期待されていた．また研究全体を通して，3 次元代数多様体の双有理幾何，特に森ファイバー空間の双有理写像に関する理解が深まり，それによって 3 次元代数多様体の有理性に関する問題，双有理同値な森ファイバー空間全体の構造に関する問題，さらには 3 次元代数多様体全体の構造のより深い理解へ発展していくことが期待されていた．

３．研究の方法

本研究は３次元代数多様体の双有理幾何に関して，方程式，巡回群の作用，blowing up の計算等を通じて具体的に理解することを目的としたものである．そのうちで最初に挙げられるものは，３次元代数多様体の因子的収縮射をすべて具体的に分類する事を目標とした．f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) を３次元代数多様体の因子的収縮射で既約因子 E を 1 点 P につぶすようなものとするとき，これらを分類しようとするとき大まかにいって Y から調べる方法と X をもとにして調べる方法の２通りが考えられる．Y から調べる方法は Y が滑らかな代数多様体のとき（森）や，たかだか Gorenstein 特異点しかもたないとき（Cutkovsky）に有効な方法であった．一方で X をもとにして，どのようにして Y あるいは f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) が得られるかを考える方法は，まず X が端末巡回商特異点である場合（川北）にうまくいき，その後，X が 通常 2 重点である場合（Corti），X が滑らかな場合（川北），X が cA_1 型の端末特異点をもつ場合（川北）と比較的多くの場合についてうまくいっていた．また，このように X をもとにして 3 次元代数多様体の因子的収縮射 f：(E ⊂Y) →(P ∈ X) であって，例外因子が既約かつその食い違い係数が最小となるものについてもその分類はすべて完成していた．

（Takayuki Hayakawa, Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities，および Takayuki Hayakawa, Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, II）

一方で３次元代数多様体の因子的収縮射で既約因子 E を 1 点 P につぶすようなものについて，Y の反標準因子からなる線型系の一般元はたかだか有理２重点しかもたないという，いわゆる general elephant の存在が証明された（川北）．そこでは P の指数が 2 以上の場合に限っていえば，いくつかの例外を除いて，食い違い係数は２以下であることが証明され，さらには食い違い係数が 2 より大きいものについては完全な分類が与えられた．

この結果を受けて，私は指数が 2 以上となる因子的収縮射であって食い違い係数が 1 のものの完全な分類を与えた．（Takayuki Hayakawa, Divisorial contractions to 3-dimensional terminal singularities with discrepancy one）

この結果，指数が 2 以上のものについて残っているのは，(cD/2) 型で食い違い係数が 2 のものだけである．これについては (cD/2) 型のときの 食い違い係数が 1/2 のものと 1 のものを比較しながら予想することさえできれば，川北の方法により分類することは可能であると考えられてきた．

３次元代数多様体の因子的収縮射のうち指数１の端末特異点である場合，つまり孤立 cDV 特異点である場合についての研究である．この場合についても指数が２以上の場合と同じようなアプローチを行った．まず多く表れると考えられる食い違い係数が 1 のものについての分類を指数が 2 以上のときにやったのと同じような方法でひとつずつ引き出して Y の特異点を調べるというやり方が有効であると考えられ，それ以外のもの，つまり食い違い係数が２ 以上のものについては，general elephant の存在証明の系として得られているように，いくつかの例外を除いて食い違い係数が４ 以下であることが知られている．この場合においては，指数２以上の場合と同じように，Y のもっている特異点の様子，E が Y 内に例外因子として入っている入り方 などを参考にして X を定める方程式がもつべきいくつかの単項式を探していくという方法をとった．いずれの因子的収縮射についても X を４次元または５次元の巡回商特異点の中に埋め込めば，それらの特異点の重みつきのブローアップとして f が実現されるとの見込みのもとでさまざまな計算を実行した．

４．研究成果

３次元代数多様体の因子的収縮射(divisorial contraction) に関して以下の成果が得られた．指数が１の３次元端末特異点のうち，ｃＥ型およびｃＤ型のものについて，その上空にある食い違い係数(discrepancy) が１の既約因子をすべて見つけた．その方法は３次元端末特異点を定義する方程式を変数変換等により変更，またはときによっては余次元の大きな空間の中への埋め込みを施した上で，さまざまな重み付きのブローアップを具体的に構成して，その例外因子が既約かつ食い違い係数が１となるようなものを構成することである．この構成の一部分として，ｃＥ型およびｃＤ型の３次元端末特異点につぶれる因子的収縮射の大部分を見つけることができた．これは具体的な３次元代数多様体の双有理幾何にとって不可欠なものになると考えられる．またこれらの結果を応用して３次元端末特異点の特異点解消に表れる既約例外因子のうちで重要であると考えられるものについて，いくつかの計算を具体的に実行した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
１．早川貴之，ｃＥ型の特異点につぶれる divisorial contraction について，射影多様体の幾何とその周辺 2007 報告集(2007), 33-40，査読無.

〔学会発表〕（計１件）
１．早川貴之，ｃＥ型の特異点につぶれる divisorial contraction について，射影多様体の幾何とその周辺 2007, 2007 年 11 月 24 日，高知グリーン会館（高知県).

６．研究組織
(1)研究代表者
早川貴之（HAYAKAWA　TAKAYUKI）
金沢大学・数物科学系・講師
研究者番号：20198823

(2)連携研究者
泊昌孝（TOMARI　MASATAKA）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：60183878
（H19：研究分担者）