

研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2007～2009
課題番号： 19540020
研究課題名（和文） 表現論・可換環論の非可換代数幾何学における分類問題への応用
研究課題名（英文） Applications of representation theory and commutative ring theory to classification problems in noncommutative algebraic geometry
研究代表者
毛利 出 (FAMILY_NAME FIRST_NAME)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号： 50436903

研究成果の概要（和文）：非可換代数幾何学において量子射影空間や量子線織曲面は主要な研究対象である。この研究課題では大きく分けて次の三つの成果を得た。(1) 可換環論を用いて非可換代数多様体上に交叉理論を展開し、量子線織曲面の幾何を解明した。(2) 有限次元多元環の表現論を用いて、量子射影空間の座標環である AS-regular algebra の構造を決定した。(3) 量子射影空間の分類と大局次元有限の有限次元多元環の分類の間に密接な関係があることを示した。

研究成果の概要（英文）：Quantum projective spaces and quantum ruled surfaces are major objects of study in noncommutative algebraic geometry. In this project, there are roughly the following three achievements. (1) By applying commutative ring theory, we develop intersection theory over noncommutative algebraic varieties and studied the geometry of quantum ruled surfaces. (2) By applying representation theory of finite dimensional algebras, we determined the structures of AS-regular algebras, which are homogeneous coordinate rings of quantum projective spaces. (3) We showed that there are strong interactions between classification problems of quantum projective spaces and those of finite dimensional algebras of finite global dimension.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

1. 研究開始当初の背景

非可換代数幾何学という研究分野は、1990年

代に M. Artin らによって始められ、現在多くの特に若手数学者によって活発に研究されている。大雑把に言って、非可換代数幾何

学とは非可換代数（多元環）を代数幾何学の手法を用いて研究しようとする学問といえる。代数幾何学における重要な研究課題の一つは低次元の代数多様体を分類することであるが、同様に非可換代数幾何学における現時点での最も重要な研究課題は低次元の非可換代数多様体を分類することである。量子射影平面は M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh (1990) によって、また非可換射影曲面は M. Artin, T. Stafford (1995) によって分類が完成された。それで次なる目標は高次元の量子射影空間や非可換射影曲面を分類することであるが、これに関しては今世界的に多くの研究者が取り組み成果をあげている。研究代表者も、量子射影空間の研究・分類には geometric pair や Koszul duality の手法を通し、また非可換射影曲面の研究・分類には交叉理論の手法を通して成果をあげてきた。

2. 研究の目的

非可換代数幾何学における最重要課題の一つは非可換射影曲面を分類することである。この研究分野の創始者である M. Artin らは最も単純な非可換射影曲面である量子射影平面を geometric pair を用いて分類することに成功した。研究代表者はこの geometric pair をもっと一般的な非可換射影スキームに応用し、例えば geometric pair がホモロジー代数的な性質を如何に決定するかについて研究して成果をあげている。また近年研究代表者は Koszul duality を非可換射影スキームに拡張することに成功し、それによって非可換代数幾何学のいろいろな研究結果を表現論や可換環論に応用したり、また逆にそれらの分野のいろいろな研究結果を非可換代数幾何学に応用したりすることができるようになった。それで本研究課題の目的は Koszul duality を介して、可換環論や表現論の結果を非可換射影曲面の分類問題に応用することと、また逆に非可換代数幾何学において有効であった geometric pair を有限次元多元環に応用して、表現論の種々の問題に取り組むことである。

3. 研究の方法

(1) 平成19年度は最終的な研究目的である量子射影空間の研究・分類を成功させるためにどのような方法・知識が必要か、表現論や可換環論を中心にあらゆる角度から検討する。そのために国内・国際研究集会にできるだけ多く参加し、広く知識を得る。

(2) 平成20年度では平成19年度までに集積した知識をもとに、最も有力と思われる方法論をいくつか選択しそれらに焦点を当てる。現時点では geometric pair と Koszul duality が研究目的達成のための主要な手段と考えているが、この時点までにまた新たな方法が見つかれば、それに関しても十分検討する。

(3) 平成21年度では最終的な結果が出るように理論の応用展開を図ることが中心となる。そのために自己の研究時間を今まで以上に確保する。また国内・国際研究集会に参加して、積極的に研究成果を発表する。

4. 研究成果

(1) 代数幾何学において低次元代数多様体を分類する際に交叉理論が重要な役割を果たすが、研究代表者は S. P. Smith との共同研究で交叉理論を非可換代数多様体上に拡張することに成功した。平成19年度の業績としては、可換環論を用いて交叉理論の対称性に関する結果を得て、論文「Symmetry in the vanishing of Ext over stably symmetric algebras」を発表した。また交叉理論が量子線織曲面上で有効に機能することを証明した論文「Intersection theory over quantum ruled surfaces」を発表した。これによって量子線織曲面の幾何が解明された。また学会報告集に論文「Symmetry in the vanishing of Ext-groups」を発表したり、第52回代数学シンポジウムにおいて「Quantum Ruled Surfaces (量子線織曲面)」という題目で講演したりして、それらの結果の公表に勤めた。また多元環の表現論において重要な役割を果たす中山自己同型を非可換射影多様体に応用する研究、量子線織曲面の分類問題に関する研究、中山自己同型を交叉理論に応用する研究などを推進した。平成19年度より浅芝秀人氏と共同で静岡大学において「静岡代数セミナー」を開催することになり、初年度は2回開催して計6名の講演者（うち外国人2名）を迎えることができた。関西や関東からも研究者が集まり、彼らとの討論を通して本研究課題を遂行する上で新しいアイデアを得る機会となった。またそれとは別に2名（うち外国人1名）が静岡大学を訪れ講演し、また本研究課題に関する意見交換を行った。

(2) 平成20年度の業績としては、非可換代数幾何学の手法を用いて表現論で重要な Frobenius 代数を研究した論文「Co-point modules over Frobenius algebras」と、非可換代数曲面の重要な例である量子線織曲面の分類に関する論文「On the

classification of decomposable ruled surfaces」の2本が査読有の論文として出版された。また可換環論を用いて交叉理論の非対称性に関する結果を得て論文「Asymmetry of Ext-groups」が出版される運びとなった。この結果はアメリカ・ネブラスカで開催された可換環論の国際会議で招待講演として発表し高い評価を得た。また多元環の表現論において重要な役割を果たす三角圏を非可換代数幾何学に応用する研究も行い、その研究結果は中国・上海で開催されたアメリカ数学会・上海数学会共催の学会の一般講演として発表し、研究結果の公表に勤めた。平成19年に引き続き平成20年度も浅芝秀人氏と共同で静岡大学において「静岡代数セミナー」を2回開催することができた。

(3) 平成21年度では多元環の表現論の応用に焦点を当てた。特に平成21年度はRIMS長期研究員にも採用されこともあり、この研究課題の最終年度にふさわしく多くの研究成果をあげることができた。

① AS-regular algebra は量子射影空間の座標環であるので、量子射影空間を研究・分類するのに、AS-regular algebra を研究・分類するのが大変有効である。その意味で非可換代数幾何学で重要な AS-regular Koszul algebra やその Koszul dual、また多元環の表現論で重要な trivial extension や preprojective algebra といった多元環が類似の構成方法で得られることを示した論文「B-construction and C-construction」を書き上げ、投稿した。

② それらの結果をさらに発展させるために、京都大学理学部 GCOE 研究員の源氏と共同研究を行い、AS-regular algebra の構造を決定した論文「Structures of AS-regular algebras」を書き上げた。これによって、AS-regular algebra の分類問題と大局次元有限の有限次元多元環の分類問題との関係が明らかになった。これらの研究結果は韓国・ソウルで開催されたアメリカ数学会・韓国数学会共催の学会の一般講演として、また日本数学会年会代数学分科会特別講演として発表した。

③ また平成21年度 RIMS 客員教授であった Colin Ingalls 氏との議論の中で、非可換代数幾何学で重要な量子線織曲面を、多元環の表現論で重要な quiver を用いて定義することに成功し、その研究の中間報告を「2009 代数幾何学城崎シンポジウム」で発表した。これによって、量子線織曲面を研究するのに表現論の手法を用いる道が開かれた。

④ また Colin Ingalls 氏と共催で RIMS 研究集会特別計画「Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics」を開催した。これは日本において初めての本格的な非可換代数幾何学の研究集会で、海外から多くのこの分野の世界的専門家を講演者として招聘することができた。日本の研究者の参加も多く、非可換代数幾何学を日本に紹介することにも大きく貢献した。

(4) これらの研究成果を通して、研究開始当初に想定したとおり、非可換代数幾何学と多元環の表現論の間に深い関係があることが明らかになってきた。特に非可換代数幾何学で重要な研究対象である AS-Gorenstein algebra と多元環の表現論で重要である trivial extensions や preprojective algebra の分類問題の間に密接な関係があることが分かった。今後はこれら二つの研究分野の研究者が協力して新しい局面を切り開いていくことが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① Izuru Mori, Quantum ruled surfaces defined by quivers, 2009 代数幾何学シンポジウム記録 (2009), 65-75 査読無

② Izuru Mori, Asymmetry of Ext-groups, J. Algebra 322 (2009), 2235-2250 査読有

③ Izuru Mori, On the classification of decomposable quantum ruled surfaces, Ring Theory 2007, World Sci. Publ. (2009), 126-140 査読有

④ Izuru Mori, Co-point modules over Frobenius Koszul algebras, Comm. Algebra 36 (2008), 4659-4677 査読有

⑤ Izuru Mori, An introduction to noncommutative algebraic geometry, Proceedings of the 40th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2008), 53-59 査読無

⑥ Izuru Mori, Symmetry in the vanishing of Ext-groups, Proceedings of the 39th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2007), 79-86 査読無

⑦ Izuru Mori, Intersection theory over quantum ruled surfaces, J. Pure Appl. Algebra 221 (2007), 25-41 査読有

⑧ Izuru Mori, Symmetry in the vanishing of Ext over stably symmetric algebras, J. Algebra 310 (2007), 708-729 査読有

[学会発表] (計 10 件)

① Izuru Mori, Classification problems in noncommutative algebraic geometry and representation theory, 日本数学会年会, 2010年3月25日 慶應義塾大学 (代数学分科会特別講演)

② Izuru Mori, Trivial extensions, preprojective algebras and AS-Gorenstein algebras, Special session on noncommutative ring theory, Joint Meeting of the KMS and AMS, 2009年12月17日 Seoul, Korea

③ Izuru Mori, Quantum ruled surfaces defined by quivers, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2009年10月29日 城崎、兵庫(招待講演)

④ Izuru Mori, B-construction and C-construction, Special session on quantum algebras and related topics, Joint Meeting of the AMS and SMS, 2008年12月18日 Shanghai, China

⑤ Izuru Mori, Noncommutative projective schemes associated to preprojective algebras and Koszul duality, Interactions between noncommutative algebra and algebraic geometry, 2008年10月31日 Banff International Research Station, Banff, AB, Canada (招待講演)

⑥ Izuru Mori, Homological properties of connected graded algebras, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 2008, 2008年9月12日 信州大学、長野 (招待講演)

⑦ Izuru Mori, Symmetry and asymmetry of the Euler form, Commutative algebra: Connections with algebraic topology and representation theory, 2008年5月20日 University of Nebraska, Lincoln, U.S.A. (招待講演)

⑧ Izuru Mori, An introduction to noncommutative algebraic geometry, 第5回日中韓環論国際シンポジウム, 2007年9月

12日 国際オリンピック記念青少年センター (招待講演)

⑨ Izuru Mori, Quantum ruled surfaces, 第52回代数学シンポジウム, 2007年8月9日 神戸大学、兵庫 (招待講演)

⑩ Izuru Mori, 非可換代数幾何学入門 I・II, 玉原代数幾何セミナー2007, 2007年8月6・7日 東京大学玉原国際セミナーハウス、群馬 (招待講演)

[その他]
ホームページ等

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~simouri/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

毛利 出 (MORI IZURU)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号: 50436903

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし