様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　６月　７日現在

機関番号：13901
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2010
課題番号：19540022
研究課題名（和文）
オービフォールド・コホモロジーとマッカイ対応の一般化
研究課題名（英文）
Orbifold cohomology and generalization of the McKay correspondence
研究代表者：
伊藤　由佳理（Yukari　Ito）
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：70285089

研究成果の概要（和文）：
オービフォールド・コホモロジーの環構造や性質を調べ，マッカイ対応の一般化へ向けて，特異点解消を群論的にモジュライ空間として構成した.

研究成果の概要（英文）：
We studied on the ring structure and several properties of Orbifold cohomology and constructed crepant resolutions of Gorenstein singularities as moduli spaces of the quivers which are given by the representations of finite groups to see the generalized McKay correspondence.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：トポロジー / マッカイ対応 / モジュライ空間 / 代数学 / 商特異点 / 幾何学 / 数理物理 / 特異点解消

１．研究開始当初の背景

マッカイ対応とは，商を作る際に使った有限群の表現論（具体的には既約表現や共役類）と特異点解消をした空間の幾何学的な不変量（具体的にはオイラー数やコホモロジーの次元など）の対応である.

また，3 次元のマッカイ対応やオービフォールド・コホモロジーは超弦理論から生まれた数学であり，起源は同じである.

オービフォールド・コホモロジーの定義はいろいろあり，どれも具体例を計算するのは容易ではない．しかし，それらはすでによく研究されている量子コホモロジーとの関係から，具体的な例を計算できることもあり，グロモフ・ウィッテン不変量を求めるという研究とも関連していた。

２．研究の目的

オービフォールド・コホモロジーをよく理解し，マッカイ対応の一般化について研究したい．一般化という意味では，クレパントな特異点解消の存在を仮定した結果は導来圏を用いたマッカイ対応などでも知られている．しかし本研究では，クレパントな特異点解消がいつ存在するのか，存在するための条件は何か，という代数幾何学本来の「特異点解消の存在」についても考察したい.

オービフォールド・コホモロジーの数学的

な意味づけやオービフォールド・コホモロジーと従来のコホモロジーの関係を調べることによって，わかるのではないかと思っている．実際，3 次元ゴレンシュタイン商特異点の場合，オービフォールド・コホモロジーの次元は，クレパントな商特異点解消の従来のコホモロジーの次元と一致する．しかしこれはベクトル空間としての同型であって，どうも環としての構造は異なるようである．そこですでに知られているオービフォールド・コホモロジーの環構造の定義から見直してみたい．

３．研究の方法

まず Barbara Fantachi 氏との共同研究で，trihedral 群の場合を具体的に計算したい．これができれば，先の定理の証明のように，一般の 3 次特殊線型群の有限非可換部分群に対しての計算にも応用できる可能性がある．実際には，オービフォールド・コホモロジーの定義がかなり複雑であり，具体的な幾何学的構造が分からない限り，計算できない．しかし本研究代表者は 3 次元の商特異点の特異点解消を構成した際に，その幾何学的な構造も多く見ているので，その経験が役立つと思われる．一方，Fantechi 氏は量子コホモロジーやグロモフ・ウィッテン不変量に関する専門家なので，この共同研究で得られる結果はいろいろな数学を結びつけるものになると思われる．

さらに、これまでの特異点解消に関する研究結果がもとにして，マッカイ対応の一般化を考えたい．

４．研究成果

2007 年度には、オービフォールド・コホモロジーについての最新の定義を見直し、具体的な例について、グロモフ・ウィッテン不変量との関係を調べたことである。この研究に関しては、イタリアの国際研究所(SISSA)の Barbara Fantechi 氏や韓国の高等研究所(KIAS)の佐藤文敏氏と 10 月には城崎と京都で共同研究を開始した。またさらに、Fantechi 氏とは、1 月以降にアメリカ・プリンストンの高等研究所でも再開し、共同研究を進めた。

この研究に関しては、研究代表者である伊藤が、プリンストンの高等研究所で開催された表現論と代数幾何学の特別プロジェクトに参加し、幾何学的表現論や数理物理を専門とする研究者たちとセミナーや議論をしたことも影響している。特にコロンビア大学の Liu 氏から、非特異なトーリック多様体のグロモフ・ウィッテン不変量の topological vertex を用いた計算方法を教わったことは大きい収穫であった。また、これまで交流のなかった幾何学的表現論の研究者と、特異点解消に関する情報交換ができたことも有意義であった。

さらに、アメリカ・プリンストンに滞在中、名古屋大学の大学院生である関谷雄飛氏の協力も得て、一般次元の G-ヒルベルトスキームを群が可換な場合、計算機で求めることができることがわかった。これは 2 次元の場合には研究代表者が明らかにしていたことであるが、グレブナー扇を用いて一般次元で記述できることがわかった。これにより、一般次元のクレパントな特異点解消の存在に関する研究もより進められることができ、その成果と予想をペンシルバニア大学にて発表した。

2008 年度には、4 次元以上の商特異点のクレパントな特異点解消の存在について研究した。具体的には、まず 4 次元で群が可換な場合にトーリック幾何学を用いて、その存在可能性について考察した。そこではクレパントな特異点解消が存在する条件を考えるだけでなく、クレパントな特異点解消が存在しない場合の条件を見つけることができた。

さらに一般次元においては、群が可換な場合と、非可換な場合の関係から、クレパントな特異点解消が存在する条件についての予想をたて、その証明を試みた。この証明はまだ、一般次元では発展途上であるが、2 次元の場合には、完全な証明が得られた。また 3 次元でも成り立つことは明らかなので、その証明をヒルベルトスキームの概念を参考にして、完成させる予定である。この証明が完成すると、現在知られている高次元マッカイ対応が、どのようなときに成り立つが判明するだけでなくて、近年盛んになっている、導来圏による議論で幾何学的性質を調べることの限界を与えることもできる。

さらに、この予想についての口頭発表を、7 月にイギリスのウォーリック大学と、12 月の東京大学での国際研究集会にて行った。

また 2008 年度後半は、佐藤文敏氏と共同研究も行った。曲線のモジュライ空間のトートロジカル環の生成元の帰納的関係式を得た。これは、オービフォールド・コホモロジーの研究とも関係している。

2009 年度前半は、高次元の商特異点のクレパントな特異点解消の存在について研究し、夏には、韓国ソガン大学に滞在中であったマイルス･リード氏のもとで開催された代数幾何学セミナーにて、これまでの研究の進展について、口頭発表し、今後の問題点について議論した。

９月からは、Alvaro Nolla de Celis 氏が日本学術振興会の外国人特別研究員として名古屋大学に来たため、３次元の非可換な群による商特異点のクレパントな特異点解消についての共同研究を始めた。この研究では、

私自身が以前用いた３次元 trihedral 群のクレパントな特異点解消の構成方法と、Nolla de Celis 氏による２次元の２項二面体群の場合のクイバーの表現のモジュライ空間による特異点解消の構成方法を融合させたものを考えた。

この共同研究では、具体例の計算をたくさん行い、より多くの非可換な群の場合の、クレパントな特異点解消の統一的な構成方法について、考察した。

また３月初めには、３次元のクレパントな特異点解消の世界的な専門家である Miles Reid 氏、石井亮氏、Michael Wemyss 氏、Timocy Logvinenko 氏を名古屋に招き、研究集会 Seminar on McKay correspondence を１週間開催した。ここでは私の共同研究の途中経過を発表するとともに、互いの最先端の研究技術に関する情報交換や議論を行った。

2010 年度には、主に Alvaro Nolla de Celis 氏との共同研究で、非可換な群による２次元の商特異点の特異点解消を、可換な部分群による商の特異点解消から作られるモジュライ空間として構成し、その性質を調べた。8 月にイギリス・ウォーリック大学での国際的な研究集会を組織、開催し、そこで、上の共同研究についての成果発表を行った。そこでは、日本人だけでなく、世界中のマッカイ対応やクレパントな特異点解消に関する研究者と交流することができ、彼らの研究成果を知るだけでなく、個人的な議論をすることで、有益な情報が収集できた。

また、6 月に静岡大学の毛利出氏による非可換代数幾何学の講義を聴き、興味をもっていたところ、7 月に代表者が静岡大学に招待され、マッカイ対応について講演することを依頼された。そこで、互いの研究を融合させた非可換版マッカイ対応について考え始め、研究を進めた。その互いの研究成果を報告しあい、今現在わかっていることやこれからの課題などの情報交換の場として、2011 年３月末に、非可換代数幾何学とマッカイ対応についてのワークショップを名古屋大学にて開催した。このワークショップには、海外からも研究者を招いて、有意義なものであった。

またこれ以外に、日本数学会からの依頼で、対称性に関する講演をした。そこでは群を幾何学的に記述するなど、これまでの商特異点の研究成果を生かすことができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 20 件）

Toshiaki Maeno: "Schur-Weyl duality and a q-deformation of Specht polynomial" Comm. Alg 35. 1307-1321 (2007)査読有.

Hiroshi Iritani: "Convergence of quantum cohomology by quantum Lefschetz" J. Reine. Angew. Math. 610. 29-69 (2007)査読有.

Toshiaki Maeno and Junzo Watanabe: Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials, Illinois J. Math., 53 (2009), 591-603 査読有.

Tom Coates, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng: Wall-crossings in toric Gromov-Witten theories I, Crepant examples. Geometry and Topology, 13 (2009), no. 5, pp.2675-2744 査読有.

Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng: Computing genus zero twisted Gromov-Witten invariants. Duke Math. J. 147 (2009), no. 3, pp.377-438 査読有.

Hiroshi Iritani: An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds. Adv. Math. 222 (2009), no. 3, pp.1016-1079 査読有.

Arcara, D. and Sato, F.: "Recursive formula for $¥psi^g-¥lambda_1 ¥psi^{g-1} + ¥cdots + (-1)^g ¥lambda_g$ in $¥overline{M}_{g,1}$$'' , Proc. of Amer. Math. Soc. , vol. 137 (2009) No. 12 4077-4081 査読有.

Hiroshi Iritani: Ruan's conjecture and integral structures in quantum cohomology. New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry (RIMS, Kyoto, 2008), Adv. Stud. Pure Math. 59 (2010), pp.111-166 査読有.

J. Dorfmeister, M. Guest, W. Rossman: The tt* Structure of the Quantum Cohomology of CP1 from the Viewpoint of Differential Geometry, Asian Jour. Math. 14 (2010) 417-438 査読有.

Yukari Ito: 「鏡の国へ行ってみよう！」～対称性のはなし～, 日本数学会「数学通信」, 15 巻 4 号, 20-30 (2011)査読無.

〔学会発表〕（計 20 件）

Yukari Ito: "The existence of crepant resolutions" Mathematics and Physics seminar. (2008/2/29) ペンシルバニア大学

(アメリカ合衆国)

Yukari Ito: "Existence of crepant resolutions" WAG Concluding Conference. (2008/7/23). ウォーリック大学(イギリス)

Yukari Ito: "Existenoe of crepant resolutions" COE COW Tokyo. (2008/12/18). 東京大学

Hiroshi Iritani: "Quantum cohomology D-modules of toric stacks", Equivariant Gromov-Witten theory and symplectic vortices, (2009/7/7),
C.I.R.M. Marseille-Luminy,

Yukari Ito: Existence of crepant resolutions, (2009/8/7), ソガン大学(韓国)

Martin Guest: "tt*-geometry", Progress on Surface Theory, MFI Oberwolfach(ドイツ).

Yukari Ito: McKay 対応入門 I, II, 静岡大学代数学セミナー, (2010/7/2), 静岡大学.

Yukari Ito: Troidal resolution of non-abelian quotient singularities, Geometry and Algebra of Orbifolds and the McKay Correspondence, (2010/8/12), ウォーリック大学(イギリス).

Yukari Ito: 「鏡の国へ行ってみよう!」～対称性のはなし～, 日本数学会市民講演会, (2010/9/26), 名古屋大学.

Yukari Ito: マッカイ対応入門, 情報数理談話会, (2010/12/21), 大阪府立大学.

Toshiaki Maeno: Alcove path と affine Weyl 群上の非可換微分構造, 日本数学会年会の中止に伴う臨時講演会 (2011/3) ,京都大学数理解析研究所.

〔図書〕(計２件)
Martin Guest: "From Quantum cohomology to Integrable Systems" Oxford Univ. Press. 305 (2008),

伊藤由佳理:「この定理が美しい」(共著), 数学書房(2009).

６. 研究組織
(1)研究代表者
伊藤　由佳理 (Yukari Ito)
研究者番号:70285089, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科・准教授

(2)研究分担者 (2007 年度のみ, 2008 年度以降は連携研究者)

ゲスト　マーチン (Martin Guest) 首都大学東京大学院理工学研究科・教授、
研究者番号:10295470

前野 俊昭 (Toshiaki Maeno) 京都大学大学院工学研究科・講師、
研究者番号:60291423

入谷 寛 (Hiroshi Iritani)京都大学大学院理学研究科・准教授、
研究者番号:20448400

(3)連携研究者
佐藤　文敏 (Fumitoshi Sato) 香川高等専門学校・講師、研究者番号:20548309