

平成21年6月22日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2008
 課題番号：19540025
 研究課題名（和文） 組み紐構造を用いたホップ代数の表現圏に関する研究
 研究課題名（英文） RESEARCH ON THE REPRESENTATION CATEGORIES OF HOPF ALGEBRAS BY USING THEIR BRAIDING STRUCTURES

研究代表者

和久井 道久 (WAKUI MICHIHISA)
 関西大学・システム理工学部・専任講師
 研究者番号：60252574

研究成果の概要：

あるクラスの有限次元ホップ代数に対して、その組み紐構造を用いて、多項式の形で与えられる不変量を導入した。この多項式不変量は、表現圏が同値であるようなホップ代数に対して同じ多項式を定めるため、表現圏が違うかどうかを知りたいときに役に立つ。ホップ代数の表現圏の不変量の典型例として表現環があるが、表現圏としては異なっているにも関わらず表現環が一致してしまうことがあり、表現環だけではホップ代数の表現圏の違いを捉えきることはできない。多項式不変量はこの問題の解決に寄与する。実際、本研究により、表現環は一致するが多項式不変量は異なるようなホップ代数の組の例が新たに見つかった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学、トポロジー、環論、表現論、ホップ代数、圏同値

1. 研究開始当初の背景

固定された次元を持つホップ代数の同型類を決定せよ、という問題はホップ代数に関する基本的な問題であり、Kaplanskyの第10予想と関連して古くから研究されてきた。ここ10年間で、増岡彰

氏、Stefan氏、Natale氏、Kashina氏らにより標数0の代数閉体上で定義された23次元以下の半単純ホップ代数が完全に分類され(その結果、未知のホップ代数が発見されるなど、分類問題に関して大きな進展が見られた。研究開始当初から、

そして現在もなお、同型類の決定は、Andruskiewitsch氏、Schneider氏らより半単純でないものを含めて、活発に研究されている。さて、分類問題が進展したおかげで沢山のホップ代数の存在を知ることになったが、その分類方法はいずれも構成的であるため、(ある次元の)ホップ代数が一つ与えられたときに、それが(すでに分類済みの)どのホップ代数と同型なのかを「瞬時に」知る方法がない。そこで、同型か同型でないかを分ける本質的な量を捉えたい、つまり、ホップ代数の不変量を見つけたい、と思うようになった。これがこの研究を始めたきっかけである。

2. 研究の目的

この研究では、ホップ代数の組み紐構造を利用して、テンソル森田同値なホップ代数に対しては同じ値をとるような不変量を定義し、その性質を調べる。丹原大介氏、山上滋氏、増岡彰氏らの研究により、表現環は同型なのに表現圏がテンソル同値にならないようなホップ代数の組がいくつか見つかっているが、そのようなホップ代数に対する不変量の値を比較して、本研究で導入される不変量が表現圏の違いを捉えることができることを示していく。

3. 研究の方法

(1) 不変量を構成する。

低次元多様体の量子不変量(すなわち、位相不変量であって、量子群を使って定義されるもの)を背景として、多項式の形で与えられる、ホップ代数の不変量を構成する。

量子不変量に関する研究では、量子群(すなわち、組み紐構造を持ったホップ代数)を1つ固定して、低次元多様体論におけるさまざまな問題を解決することが多い。この研究では、逆に、枠付き結び目を1つ固定して、量子不変量をホップ代数の不変量として扱い、ホップ代数の表現圏の研究に応用する。

(2) 不変量を計算する。

興味深い非可換半単純かつ余半単純なホップ代数の系列を見出して、その組み紐構造と既約表現を決定し、多項式不変量を計算する。

有限群 G の群ホップ代数 $k[G]$ の組み紐構造は、極大な正規可換部分群を決定し、その群ホップ代数の組み紐構造をリストアップすれば、求めることができる。一般の非可換半単純かつ余半単純なホップ代数については、組み紐構造や既約表現を求めるための統一的な方法はない。しかしながら、Kac-Paljutkin型ホップ代数をはじめとする興味深い非可換半単純かつ余半単純なホップ代数は、ある有限群の群ホップ代数の余積を「ひねった」ものとして実現されることが多く、このようなことがわかると、既約表現はもちろんのこと、組み紐構造も群ホップ代数のそれを決定するときと類似の手法で決定することができる。

(3) 不変量の性質を予想して、証明する。

具体的なホップ代数について多項式不変量を計算し、その計算結果を分析して、多項式不変量が持っている性質を予想する。大きな行列や高次多項式の代数演算を実行する必要性が出て来る場合には、最新の計算機ソフトの力を借りる。さらに、その予想が正しいことを証明する。例えば、多項式不変量は、いくつかの計算結果から、整数係数の多項式になることが予想されていたが、ホップ代数 A の基礎体 k の拡大のガロア群が A の組み紐構造の全体に作用することなどが解明され、多項式不変量が整数係数となるための条件を求めることができた。

4. 研究成果

(1) ホップ代数の多項式不変量の構成

体 k 上のホップ代数 A に組み紐構造 R が与えられると、 A の有限次元表現 V に対して量子次元と呼ばれる k の元 $\dim(V, R)$ が定まる。Etingof氏、Gelaki氏により、有限次元半単純かつ余半単純なホップ代数の組み紐構造は有

限個しかないことと、 V のベクトル空間としての次元 $\dim V$ が k において 0 にならないことが知られている。このことから、 $\dim(V, R)/\dim V$ たちを根に持つ多項式 $P_V(x)$ を考えることができる。 d 次元既約表現の同型類すべてにわたって $P_V(x)$ の積をとって $P_A^{(d)}(x)$ を定義する。この多項式が本研究で導入されたホップ代数の不変量である。 $P_A^{(d)}(x)$ は単にホップ代数の不変量というだけではなく、テンソル森田同値不変量になる。

(2) 表現環は同じであるがテンソル森田同値でない、ホップ代数の組の新しい例の発見
丹原大介氏、山上滋氏、増岡彰氏により、8次元の非可換半単純ホップ代数は同じ表現環を持つが、表現圏はテンソル同値でないことが示されている。研究代表者は、彼らの結果の別証明を、多項式不変量を計算することにより、与えることができた。さらに、鈴木智支氏により発見された2次正方行列によって生成される余半単純ホップ代数の系列(この系列は8次元のKac-Paljutkin型ホップ代数を含んでおり、 ν, λ, N, L によりパラメータづけられている)に対して多項式不変量を計算し、表現環は同じであるがテンソル森田同値でない、ホップ代数の組の新しい例を発見した。具体的には、鈴木氏の構成した余半単純ホップ代数の系列のうち、 ν が+で N が奇数の場合の代数構造を調べ、それが代数としては二面体群を部分群として含むある有限群の群代数 A と同型になることをつきとめた。群ホップ代数 A の多項式不変量も計算し、比較した結果、 ν が+で N が奇数、 n が偶数には、鈴木氏のホップ代数と群ホップ代数 A とは同じ表現環を持つが、多項式不変量は異なることがわかった。

(3) 多項式不変量の整数性

ホップ代数が分解型有限次元半単純で、かつ、ホップ代数の基礎体が有理数体のガロア拡大であって、そのガロア群がホップ代数に semilinear に作用するとき、多項式不変量は整数係数になることがわかった。特に、位数 n の有限群の群ホップ代数の多項式不変量は、その係数体が有理数体のガロア拡大体で、1の原始 $n^{\wedge}3$ 乗根を含むとき、常に整数係数になることがわかった。

(4) 基礎体の拡大の下での多項式不変量の安定性
基礎体の適当な有限次分離拡大をとると、それ以上基礎体を拡大しても、組み紐構造は増えないことがわかった。このことから、多項式不変量は基礎体の適当な有限次分離拡大をとった後では、変化しない(安定する)ことがわかった。

(5) 総括・今後の展望

Schauenburg氏の結果により、ホップ代数がテンソル森田同値かどうかはホップ代数がコサイクル変形で移りあうかどうかで決まることが知られている。したがって、この問題はある種の2次元コホモロジーの計算に帰着される。この方面からは泉正己氏、幸崎秀樹氏や増岡彰氏による研究成果がよく知られているが、一般に、2次元コホモロジーを求めることは非常に困難である。本研究で導入されたホップ代数の多項式不変量は、テンソル森田同値の完全不変量ではないが、テンソル森田同値性の判定に有効である。また、多項式不変量はある条件の下で整数性や安定性などの「よい」性質を持っていることも明らかになった。今後、この不変量がホップ代数や表現論の分野で、新たな「研究道具」となって活躍していくことを期待している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

① 和久井道久, Polynomial invariants of

finite-dimensional Hopf algebras derived from braiding structures, Proceedings of the 41st Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 96–105, 2009, 無.

[学会発表] (計4件)

① 和久井道久, Polynomial invariants of representation categories of semisimple and cosemisimple Hopf algebras, 第41回環論および表現論シンポジウム, 静岡大学, 2008/9/6.

② 和久井道久, ホップ代数の積分を用いて定義される3次元多様体の不変量(概説), 2+1次元トポロジーの新しい流れ, 早稲田大学, 2007/11/14.

③ 和久井道久, On the Turaev-Viro-Oceanu invariant of 3-manifolds derived from generalized E_6 -subfactors (佐藤信哉氏との共同研究), 研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology 兼 拡大大KKOOKセミナー」, 大阪市立大学, 2007/8/29.

④ 和久井道久, ホップ代数の表現圏に対する多項式不変量, 数学特別セミナー, 筑波大学, 2007/8/4.

[その他]

ホームページ

<http://www2.ipcku.kansai-u.ac.jp/~wakui/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

和久井 道久 (WAKUI MICHIHISA)

関西大学・システム理工学部・専任講師

研究者番号：06252574