様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22　年　4　月　2　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００７～２００９
課題番号：１９５４００２６
研究課題名（和文）　代数群のエルミート定数とその応用

研究課題名（英文）　Hermite constants of algebraic groups and their applications

研究代表者
渡部　隆夫（WATANABE TAKAO）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：３０２０１１９８

研究成果の概要（和文）：正定値実対称行列のなす錘上で，算術的最小関数と被約行列式の商により定義される関数をエルミート関数とよぶ．この関数の最大値の決定は，球を規則正しくできるだけたくさん詰め込む方法，いわゆる格子球充てん問題の最大密度の決定と同値である．この研究では，エルミート関数の極大値を記述するボロノイ理論の幾何的･数論的拡張を与え，シンプレクティック群に対する一般エルミート定数，及びランキン-エルミート定数の値を決定した．

研究成果の概要（英文）：On the cone of positive definite n by n real symmetric matrices, Hermite's function is defined as a quotient of the arithmetical minimum function and the reduced determinant. The determination of the actual value of the maximum of Hermite's function is equivalent to the determination of the densest lattice sphere packing in an n-dimensional Euclidean space. The local maxima of Hermite's function is characterized by Voronoi's theory. In this research project, we investigated a geometric and arithmetic generalization of Voronoi's theory. We determined exact values of a generalized Hermite constant of a symplectic group and some Rankin－Hermite's constants.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数群，　エルミート定数，　ボロノイ理論，　格子，　簡約理論

１．研究開始当初の背景

n 次元 Euclid 空間の格子及び２次形式の簡

約理論として，Minkowski による「数の幾何」と Voronoi 理論がある．「数の幾何」は，Euclid 空間内の凸体に含まれる格子点の存在・非存在，および格子基底の簡約についての理論であり，Voronoi 理論は，格子の同値類集合上定義される Hermite 不変量の極大値の特徴付け，および n 次正定値対称行列の成す錘の同変な胞体分割を与える理論である．これらの古典的理論を背景に，研究代表者は，大域体上定義された射影的等質空間上の標準的高さを正定値２次形式の対応物として捉えることにより一般 Hermite 不変量を導入し，その性質を簡約可能代数群の簡約理論の枠組みで定式化するという研究を行ってきた．この研究は，等質空間上で数の幾何や Voronoi 理論を展開するための基礎を与えるものである．本研究課題の動機は，この土台をもとに，旗多様体の一般 Hermite 定数の決定とアデール的な手法による Voronoi 理論の一般化の展開，及び Diophantus 近似や Arakelov 幾何への一般 Hermite 定数の理論の応用を図ることであった．

２．研究の目的

当初の研究目的として挙げたのは次の３点である．

(1) 低次数シンプレクティック群の一般 Hermite 定数の決定:

代数体上定義された連結簡約可能代数群の一般 Hermite 不変量とは,各極大放物的部分群に対応して定義される標準的高さから定まるアデール商空間上の連続関数のことである．一般 Hermite 不変量の最大値を一般 Hermite 定数という．問題の代数群が有理数体上のシンプレクティック群でかつ極大放物的部分群が Siegel 型放物的部分群ならば，その一般 Hermite 定数は，複素上半空間上のシンプレクティックモジュラー群の作用に関する Siegel 基本領域の点の虚部の行列式の最小値の平方に等しい．その値の決定には基本領域の情報が不可欠であるが，次数２の場合は Gottschling により，また次数３の場合は神野五月により基本領域を記述する不等式が与えられている．これらの情報を使って一般エルミート定数の決定を試みる．この研究は Poor と Yuen による Siegel 尖点保型形式の Fourier 係数の評価による消滅判定定理に直接の応用をもつ．

(2) Minkowski の第２定理及び Siegel の補題の旗多様体への拡張と Diophantus 近似への応用:

研究代表者は，一般 Hermite 不変量の応用として，Severi-Brauer 多様体上の高さに関する Minkowski の第２定理を示した．この結果は，逐次最小の積が斜体の一般 Hermite 定数で上から評価されるという形で与えられる．その他に，大域体上定義された Grassmann 多様体上の捻れ高さについての Siegel の補題の拡張も得ている．これらの結果は共に斜体上の一般線形群が作用する等質空間の枠組みで，数の幾何の類似を考察することにより示された．一般 Hermite 不変量の理論は，任意の簡約可能代数群で確立されているので，それをもとに Minkowski の第２定理や Siegel の補題の一般的枠組みを構築する．Diophantus 近似論との関連では，Severi-Brauer 多様体上の数の幾何は，非可換体上の Diophantus 近似に直接的な応用があると考えられ，一般には，旗多様体ごとに対応する Diophantus 近似論が展開できるものと思われる．例えば，２次 Grassmann 多様体の場合には，２次形式の零点に関する Diophantus 近似等が考えられる．

(3) Arakelov 幾何的な代数的整数論への応用:

近年，代数体のイデアル類群や類数の計算の実行に Arakelov 幾何的な方法が導入されている．Schoof は，Shanks や Lenstra のアイデアにもとづいて代数体の Arakelov 類群を定義し，被約因子という概念を導入して Arakelov 類群の計算アルゴリズムを提示している．また Van der Geer と Schoof は代数体の Arakelov 因子に対し，通常の代数曲線上の因子から従う直線束の切断の成すベクトル空間の次元に相当する値を定義して

Riemann-Roch の定理の類似を示した．Arakelov 因子の定義から従うイデアル格子を使うことにより，Arakelov 因子の Hermite 不変量が定義され，それを上記の次元の類似の評価に応用することができる．Arakelov 類群の計算や理論の高次元化について様々な問題が残されている．これらの問題に対し一般 Hermite 定数の枠組みの適用を図る．

３．研究の方法

(1) 低次数のシンプレクティック群の一般 Hermite 定数の決定について，Siegel モジュラー群の基本領域が具体型に記述できる次数２と３の場合を重点的に考察する．次数２の場合に，河村隆(成蹊大学理工学部非常勤講師)，早田孝博(山形大学工学部助教)と討議を行い，計算を進めていく．

(2) Minkowski の第２定理及び Siegel の補題の旗多様体への拡張と Diophantus 近似への応用について，高さ関数による Diophantus 近似論の従来の手法に詳しい Vaaler, Fukushansky と，一般 Hermite 定数の専門家である Coulangeon, Icaza の双方と連絡を取り，情報交換と討議を行う．

(3) Arakelov 幾何的な代数的整数論への応用については，高次元化の理論の整備を図るために，Leibak が研究していた代数体上の加法的一般エルミート定数における Voronoi 理論について，未解決の問題(eutaxy の正しい定義と perfection な点の有限性)に取り組む．

４．研究成果

(1) 有理数体上の次数２のシンプレクティック群とSiegel型放物的部分群から定義される一般Hermite定数の値が，河村隆により決定された．これはSiegel基本領域のGottschlingによる記述を用い，条件付極値問題を具体的に解くことにより求められた．また，早田孝博は，基本領域の境界の0次元セルの計算を行い，一般Hermite定数の値を実現する点が，境界の0次元セルになっていることを確認した．

(2) ユークリッド空間内の格子に付随する不変量の一つにHermite-Rankin定数がある．これは，Rankinが1953年の論文でHermite定数の自然な拡張として導入したもので，階数nの格子の判別式のn/k乗と，階数kの部分格子の判別式の比の最大値として定義される値で，これを $\gamma_{n,k}$ と表す． $k = 1$ の場合がn次元Hermite定数と一致する．$k \geq 2$のとき，これまでに知られていた $\gamma_{n,k}$ の値は，Rankinが求めた $\gamma_{4,2} = 3/2$ だけであった．今回の研究で，Poor-Yuen によって求められた，５次元と７次元のBerge-Martinet定数の値から，Rankinの不等式や Berge-Martinet によって示された不等式を組み合わせることにより，$\gamma_{8,k}$ (k =, 3, 4) と $\gamma_{6,3}$ の値を決定することができた（沢谷一臣，奥田健二との共同研究）．一般に双対関係 $\gamma_{n,k} = \gamma_{n,n-k}$ が知られているので，既知の $\gamma_{8,1}$ と合わせれば，８次元のHermite-Rankin定数はこれですべて決定されたことになる．これらの結果と値を決定するために使用された論法は，Meyerにより代数体上の一般Hermite定数の値の決定にも応用されている．

(3) n次実対称行列からなるベクトル空間 V の中で，正定値対称行列全体のなす開凸錘を P とする．P 上定義される算術的最小関数の被約行列式による商はエルミート関数とよばれ，その極大値を与える点は，Voronoi の定理により明確に特徴付けられている．それは perfection と eutaxy とよばれる二つの性質により記述される．算術的最小関数と被約行列式は P 上のタイプ１関数と呼ばれる，P 上の正値関数で半線形性と凹性をみたす関数の族に含まれる．今回の研究では，エルミート関数の定義において被約行列式をタイプ１関数に置き換えた場合に，Voronoi の定理の一般化が成り立つかどうかを調べた(沢谷一臣との共同研究)．その結果，タイプ１関数が微分可能かつ strictly log concave であれば，perfection と eutaxy に類似のある種の性質が極大値を

とるための必要十分条件を与えることが解った．更に，タイプ１関数全般について，Pのカーネルと呼ばれる領域との対応関係を確立し，エルミート的定数の存在，その双対概念等について一連の結果を導き出した．この研究成果は，Voronoi 理論の研究の裾野を広げるものであり，Ryshkov 領域の一般化，k-perfect form の幾何的特徴付け，symmetric cone への理論の拡張等の研究のための一つのアプローチを与える．

(4) １９７０年代はじめに Shanks は，実２次体の主イデアル類が１次元トーラス的な構造をもつことを見出し，それを"infrastructure"と呼んだ．最近の論文で，Schoof は，代数体のアラケロフ類群を用いることによって，"infrastructure"のきれいな定式化を任意の代数体で与えている．Schoof の論文では，２次体のイデアルが整数係数２元２次形式の簡約形式に対応するときに満たす条件を高次の体に拡張することにより，被約アラケロフ因子という用語が導入される．その定義から被約アラケロフ因子の個数は高々有限個しかないことが示されるが，今回の研究ではその個数の上下からの評価を与えた（吉満隆亮氏との共同研究）．具体的には，n 次の代数体 F に対し，その被約アラケロフ因子の個数を r，類数を h，単数規準を R とするとき， $A\cdot g! \leqq r/hR \leqq B\cdot\pi$ の形の不等式を証明した．ここで A，B は F から決まる具体的に計算可能な定数で，g は F の単数ランクである．F が２次体の場合，r は F の判別式と同じ判別式を持つ整数係数２元２次簡約形式の個数と一致する．この場合に，知られている r の値を使って，示された不等式の評価の精度を確かめたところ，下からの評価は良い近似値を与えるが，上からの評価はそれほど良くないということも確認した．一般の高次の代数体に対し，r の値を具体的に計算する方法は今のところ知られていないようである． 被約アラケロフ因子は Schoof の理論において中心的な役割を果たすが，その個数についておおよその検討をつけることができるという点に今回の結果の意義がある．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

①沢谷一臣，渡部隆夫，奥田健二，A note on the Hermite-Rankin constant, J. Th. Nombres Bordeaux, 査読有，印刷中．

②渡部隆夫，吉満隆亮，A bound of the number of reduce Arakelov divisors of a number field, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 査読有，Vol.493, ２００９年 399 – 408.

〔学会発表〕（計４件）

①渡部隆夫，A simple generalization of Voronoi's theorem, Korean Mathematical Society and American Mathematical Society Joint Meeting, ２００９年１２月１７日， 李花女子大学， 韓国

②渡部隆夫，On Voronoi's theorem and related problems, Geometry and Analysis on Automorphic Forms of Several Variables, ２００９年９月１４日，東京大学

③渡部隆夫，８次元 Hermite-Rankin 定数の値，日本数学会年会，２００９年３月２７日，東京大学.

④渡部隆夫，A bound of the number of reduced ideals of a number field, International Conference on The Algebraic and Arithmetic Theory of Quadratic Forms 2007, ２００７年１２月１８日，チリ

６．研究組織
(1)研究代表者

渡部 隆夫（WATANABE TAKAO）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30201198