

機関番号：14403

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540029

研究課題名 (和文) 多元環を含むアルチン環の研究

研究課題名 (英文) Study of artinian rings including algebras

研究代表者

馬場 良始 (BABA YOSHITOMO)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：10201724

研究成果の概要 (和文)：

多元環を含むアルチン環に関するレクチャー・ノートを、研究分担者の大城紀代市・山口大学・名誉教授と共同執筆・出版を行い、この分野に関する研究の促進に貢献した。さらに、アルチン環の森田自己双対性に関する研究成果や、almost N-projective に関する研究成果を生み出した。

研究成果の概要 (英文)：

The research representative and Professors emeritus Kiyochi Oshiro who was a member of this project wrote a lecture note about artinian rings including algebras. And the lecture note was published in 2009. We believe the book contribute to the development of this field of study. Further the research representative succeeded in the study of Morita self-duality of artinian rings and almost N-projectives.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 古典的アルチン環だけではなく、最近急速に研究が進められ、様々な美しい結果が生まれている新種のアルチン環である原田環の研究をも含んだ書籍が無いのが現状であった。

(2) また、アルチン環の森田自己双対性の研究は、その研究の困難さから、進歩は遅々としたものであったのが現状であった。

(3) さらに、almost N-projectives の研究は、その構造の複雑さや、概念の波及する範囲の広さから、その全体像が明らかにされていなかった。

## 2. 研究の目的

アルチン環はイデアルに関する降鎖条件を満たす環であり、最近の様々な研究の結果、さらに多くの疑問が生じている環である。研究の目的は、このアルチン環を中心とする環に関して、下記の (1) – (4) のを行うことである。

- (1) どのような条件の下で、原田環が Morita self-duality を持つかを明らかにする。
- (2) Fuller の定理の周辺定理を、さらに使い勝手があり、定理が内包している意味が明らかになるように一般化する。
- (3) Almost projective, almost injective の研究の視点から、アルチン環の構造を調べる。
- (4) 原田環を通して、古典的アルチン環である中山環・QF 環の再研究について述べたレクチャー・ノートを執筆し、その出版を目指す。

## 3. 研究の方法

文献の精査や、研究分担者をはじめとする、この分野の研究者との綿密な研究打ち合わせ等を行いながら研究を行う。

## 4. 研究成果

- (1) 本年度の最大の研究成果は、研究代表者と研究分担者の大城紀代市山口大学大学院名誉教授とのレクチャー・ノート “Classical artinian rings and related topics”, World Scientific (2009) の出版である。このレクチャー・ノートには、中山正によって QF 環と中山環が導入されて以来、様々な研究者により綿々とその構造の研究がなされ続けてきた古典的アルチン環が、1978 年の原田学が導入し、後に原田環と呼ばれるようになった新しいアルチン環の研究により、新たな視点からの再研究がなされることとなった、その研究成果が書かれている。古典的アルチン環の様々な過去の研究が、新たな視点から洗い直されてのみならず、原田環自身の美しい構造についても、Skew Matrix ring という新たな手法により行列表現されている。さらに、中山環

でさえ証明が難解な森田自己双対性を持つかどうかの問題を、ある種の原因環が森田自己双対性がもつ同値条件についても考えている。そして、extending properties と lifting properties により、中山環の R-加群論的特徴付けを行い、それにより QF 環、中山環、原田環の関係を明らかにしている。また、これらの研究の基礎的な道具となる、Fuller の定理とその周辺定理についても、体系的に述べている。このような内容をもつ、このレクチャー・ノートは、この分野の研究集約書としての意味を持ち、多くの読者にこの分野を理解してもらうにふさわしい図書であると自負している。

- (2) projective modules, injective modules はそれぞれ、直和、直積で閉じている R-加群であるが、それらを一般化した lifting modules, extending modules は有限直和でさえ、必ずしも閉じてはいない R-加群である。almost projective, almost injective は lifting modules, extending modules が有限直和で閉じるための付加条件として定義され、さまざまな観点から研究されてきた概念である。しかし、未だにその全体像が明らかにならなかったとはいえない。さらに、同様の観点から、研究分担者の大城紀代市名誉教授によって定義された generalized projective, generalized injective は、almost projective, almost injective より少し強い条件で、複雑な故に扱いにくさがあるものの、lifting modules, extending modules との相性のよさから近年よく研究されるようになってきた概念である。本研究では、almost projective, almost injective の未解決分野の研究、generalized projective, generalized injective との関係づけを行った。また、この分野は projective かつ injective な加群を特徴付けた K. R. Fuller の研究の一般化と深いつながりがある。本年度は、Colocal pair をなすという条件を中心にこの研究も行った。引用されることの非常に多い、研究代表者と大城紀代市名誉教授の共著論文の結果をさらに深めたものといえる。
- (3) almost projective は、M. Harada and A. Tozaki: Almost M-projectives and Nakayama rings, J. of Algebra 122 (1989), 447–474 に於いて、lifting modules の直和が再び lifting になる同値条件の研究から生み出されたものであった。これらに関しては、現在までに大量の興味深い結果が生み出されており、

注目すべき概念である。原田学はさらに、M. Harada : Note on almost relative projectives and almost relative injectives, Osaka J. Math. 29 (1992), 91-102 に於いて少し弱い条件である almost  $N$ -simple-projective を導入し、半完全環  $R$  と有限組成列をもつ  $R$ -加群  $M, N$  に対して、 $M$  が almost  $N$ -projective であることと almost  $N$ -simple-projective であることが同値であることを示している。今回はこの結果から「有限組成列」という条件を取り去り、半完全環  $R$ , 有限生成  $R$ -加群  $M$ , 有限 Loewy length をもつ直既約  $R$ -加群  $N$  に対して、2つの条件が同値であることを証明することに成功した。また、半完全環  $R$ , 有限生成  $R$ -加群  $M$ , 有限 Loewy length をもつ  $R$ -加群  $N$  に対し、 $M$  が  $N$  simple-projective であることと  $N$ -projective であることが同値であることの証明にも成功した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① Yoshitomo Baba, Takeshi Yamazaki, On almost  $N$ -simple-projectives, Math. J. of Okayama Univ., 査読あり, 53, 2011, pp101-109
  - ② Derya Keskin, Kuratomi Yosuke, On generalized epi-projective modules, Math. J. Okayama Univ. 査読あり, 52, 2010. pp111-122
  - ③ Yoshitomo Baba, On colocal pairs, Ring Theory 2007, 査読あり, 2009, pp173-182
  - ④ Kazutoshi Koike, Morita duality and recent development, Ring theory 2007, 査読あり, 2009, pp101-115
  - ⑤ Ryo Narasaki, Katsuhiro Uno, Isometries and extra special Sylow groups of order  $p^3$ , J. Algebra, 査読あり 322, 2009, pp2027-2068
  - ⑥ Yoshitomo Baba, Self-duality of Harada ring of a component type, J. Algebra
- and its Applications, 査読あり, 3, 2008, pp125-134
  - ⑦ Kuratomi Yosuke, Generalized projectivity of quasi-discrete modules, It. Electron J. Algebra, 査読あり, 3, 2008, pp125-134
  - ⑧ Akihide Hanaki, Mitsugu Hirasaka, Katsuhiro Uno, Commutativity of association schemes of prime square order having non-trivial thin closed subsets, J. Algebraic Combin, 査読あり 27, 2008 pp307-316
  - ⑨ Kazutoshi Koike, Azumaya's conjecture and Harada rings, Proceedings of the 39<sup>th</sup> Symposium on Ring theory and Representation Theory, 査読なし, 39, 2007, pp90-95
  - ⑩ Kuratomi Yousuke, Chang Chaehoon, Lifting modules over right perfect rings, Comm. In Algebra, 査読あり, 35, No.10, 2007, pp.3103-3109
  - ⑪ Yoshihisa Nagatomi, Kiyochi Oshiro, Masahiko Uhara, Kota Yamaura, Skew-matrix rings and applications to QF-rings, Ring Theory 2007, 査読あり, 2009, pp248-271

[学会発表] (計 4 件)

- ① Kazutoshi Koike, Morita duality and recent development, The fifth China-Korea-Japan International Symposium on Ring Theory, 2007年9月14日, National Olympics Memorial Youth Center
- ② Yoshitomo Baba, On colocal pairs, The fifth China-Korea-Japan International Symposium on Ring Theory, 2007年9月12日, National Olympics Memorial Youth Center
- ③ Masahiko Uhara, Yoshihisa Nagatomi, Kiyochi Oshiro, Skew-matrix ring and applications to QF-ring, The fifth China-Korea-Japan International Symposium on Ring Theory, 2007年9月12日, National Olympics Memorial Youth Center
- ④ Kiyochi Oshiro, Professor Harada-person and work, The fifth

China-Korea-Japan International  
Symposium on RingTheory, 2007年9月  
12日, National Olympics Memorial Youth  
Center

〔図書〕(計1件)

Yoshitomo Baba, Kiyochi Oshiro, Classical  
artinian rings and related topics, World  
Scientific, 2009, 312

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

馬場 良始 (BABA YOSHITOMO)  
大阪教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 10201724

### (2) 研究分担者

宇野 勝博 (UNO KATSUHIRO)  
大阪教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 70176717

大城 紀代市 (OSHIRO KIYOICHI)  
山口大学・理工学研究科・名誉教授  
研究者番号: 90034727

小池 寿俊 (KOIKE KAZUTOSHI)  
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・教授  
研究者番号: 20225337

倉富 要輔 (KURATOMI YOUSUKE)  
北九州工業高等専門学校・総合科学科・准  
教授  
研究者番号: 60370045

### (2) 研究協力者

Patrik F. Smith  
University of Glasgow・Faculty of  
Information and Mathematical Sciences・  
Honorary Senior Research Fellow

貞末 岳 (SADASUE GAKU)  
大阪教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 40324884