

平成21年 6月18日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007 ～ 2008 年度
 課題番号：19540030
 研究課題名 (和文) 数え上げ問題に現れる行列式・パフィアンと q -series の研究
 研究課題名 (英文) Research on determinants and Pfaffians appearing
 in Enumerative Combinatorics
 研究代表者
 石川 雅雄 (ISHIKAWA MASAO)
 鳥取大学・教育センター・准教授
 研究者番号：40243373

研究成果の概要：この研究の目的は数え上げ組合せ論に現れる行列式やパフィアンとその q -analogue について、超幾何級数や直交多項式等の関係からのアプローチであった。これらの行列式やパフィアンは d -complete posets の hook formula や対称性を考慮した平面分割の数え上げ問題、Stanley の FPSAC における open problem など、いろいろな所に現れ、その考察において、色々な発展を得て論文にした。1つは、ordered partitions の数え上げに現れる行列の評価である。もう1つは、Stanley の FPSAC における open problem に現れる重み関数を一般の分割にわたって和を取ると、Askey-Wilson 多項式の特別な場合である Al-Salam-Chihara 多項式と深い関係があることがわかった。また、カタラン数を成分とするハンケル行列式の lattice path を使った証明は有名であるが、その拡張として成分に little q -Jacobi 多項式に持つハンケル行列式も、同様の結果を持ち、同様に lattice path を使って説明できることを示せた。これらの結果は、それぞれの論文にまとめてある。また、内外の研究集会で研究成果発表を行った。この他にも、最近では、平面分割の数え上げ問題と数理論理学の関係の研究が盛んである。特に q -KZ 方程式に関する Razumov-Stroganov 予想に関連して q -KZ 方程式と様々な対称性を考慮した平面分割の数え上げ問題と FPL の関係が研究されている。この方面でも、TSSCPP の数え上げ問題と constant term identity などの研究成果があった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2008 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組み合わせ論・対称関数・数理論理学モデル

1. 研究開始当初の背景

| (1) 交代符号行列式 (alternating sign

matrices) についての研究は例えば Mills-Robbins-Rumsey, “Alternating sign matrices and descending plane partitions.” (J. Combin. Th. Ser. A 34, 340-359, 1983) などの一連の論文以来、数多くの研究者を魅了し続けてきた。その歴史は例えば Bressoud, “Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture.” (Cambridge University Press, 1999) などに詳しい。また、この問題に端を発した平面分割 (plane partitions) のいろいろな symmetry を考慮した数え上げ問題 (c.f. R. P. Stanley, “Symmetry of Plane Partitions” J. Combin. Th. Ser. A 3 (1986), 103-113) や、それに付随した行列式やパフィアンの評価や、 q -series への basic hypergeometric series の応用、Zeilberger の creative telescoping による q -series の等式の証明など、その広がりや発展は枚挙のいとまがなく数学のいろいろな分野と密接に関連している。交代行列式については Razumov や Stroganov などのロシアの研究者による一連の q -KZ 方程式による研究 (例えば Stronoganov, “A new way to deal with Izergin-Korepin determinant at root of unity”, math.ph/0204042) や Jinn-Justin, DiFrancesco などのフランスの数学者による Fully Packed Loops Model (FPL) を使った研究 (例えば P. Di Francesco, “A refined Razumov-Stroganov conjecture”, arXiv:cond-mat/0407477) など、数理物理モデルの研究と関連して最近でも活発に研究され、各方面から注目されている。

(2) また、交代行列と同じ母関数をもつと予想される平面分割として Totally symmetric self-complementary plane partitions (以下 TSCPP と略す) の数え上げ問題は Mills-Robbins-Rumsey による論文 Self-complementary totally symmetric plane partitions” (J. Combin. Theory Ser. A, 42, (1986), 277-292) で最初に提出された。その中には今でも未解決の興味深い予想がある。

2. 研究の目的

(1) この研究の目的は TSSCPP など平面分割や符号交代行列 (または、その拡張としての FPL) などの数え上げ問題に現れる行列・パフィアンの研究や、また数理物理的手法による解明である。TSSCPP に関する Mills-Robbins-Rumsey 予想の最終的な式はたいへん綺麗な積表示になっている。M. Ishikawa, “On Refined Enumerations of Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions I, II” (preprint) で得られ

た行列式やパフィアンの評価は超幾何級数と深く関係していることは George Andrews 教授の一連の論文や Christian Krattenthaler 教授の論文 “Advanced Determinant Calculus” (Séminaire Lotharingien Combin. 42 (1999) B42q) などからも明らかであり Doron Zeilberger の WZ algorithm や、古典群の指標公式、対称関数の理論 [が有効であると思われる。

(3) また Georgia Tech. の Mihai Ciucu 氏と共同研究もしており、タイリング問題や perfect matching, Ising model など数理物理と密接に関連した問題も行列式やパフィアンで表わされる。この他にもランダム行列等にも、Schur 関数等の対称関数は深く関係しており、ランダム行列、直交多項式と行列・パフィアンの評価についての研究もテーマである。

3. 研究の方法

(1) 数え上げ組合せ論に表れる行列式・パフィアンは数理物理、平面分割、Schur 関数や Hall-Littlewood 関数のような群の指標公式、Schubert 多項式、Askey-Wilson 多項式などの直交多項式、 q -超幾何級数、 q -series などと深く関係している。さらに、組合せ論や対称関数は Tracy-Widom, “A limit theorem for shifted Schur measures”, Duke Math. J. 123 (2004), 171-208 のように random matrix theory や直交多項式と関係していて、いろいろな研究課題が存在する。

(2) M. Ishikawa, “On Refined Enumerations of Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions I, II” (preprint) で得られた constant term identity は Schur 関数の等式と関係していて、古典群の表現論や指標に関係深い対称関数の理論の研究と結びついている。例えば、著者が Université Claude Bernard (Lyon I) の Jiang Zeng 教授および Frederic Johet 氏と行った共同研究 “A generalization of Kawanaka’s identity for Hall-Littlewood polynomials and applications”, J. Algebraic Combin. 23 (2006) 395 - 412 によって、このような Schur 関数の等式を Hall-Littlewood 多項式の等式に拡張し、Roger-Ramanujan 型の等式を得たように Hall-Littlewood 多項式や Macdonald 多項式との関連も興味深い。

(3) 計算機は、組合せ論においては必須の道具ではないが、重要な役割を果たすことが多い。ラトガス大学の Doron Zeilberger 教授による creative telescoping や Askey-Wilson scheme project を利用した直交多項式や超幾

何級数の計算、フランスの Marne-la-Vallee 大学を中心として開発されている ACE (Algebraic Combinatorics Environment, ミシガン大学の John Stembridg の Coxeter/Weyl パッケージなど、この分野の研究で使えるパッケージは枚挙に暇がなく、世界中の研究者が利用していることは、その研究面での重要性は言うまでもないことである。

4. 研究成果

(1) 平成19年度の科学研究費補助金を使い、7月に中華人民共和国天津市南開大学で開催された第17回形式的冪級数と代数的組合せ論に関する国際学会において研究成果発表を行った。1つは、講演として Refined Enumerations of Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions and Constant Term Identities というタイトルで平面分割の数え上げ問題についての発表を行い、もう1つは、ポスターセッションにおいて Schur Function Identities and Hook Length Posets というタイトルで、hook-length property を持つ半順序集合についての研究について発表した。また、アメリカ合衆国ジョージア州にある東ネネシー州立大学で開催された格子上の path の組合せ論とその応用に関する第6回国債研究集会においても同様のタイトル Refined Enumerations of Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions and Lattice Path Combinatorics で講演を行った。9月には沖縄で行われた組合せ論サマースクールにおいて「Catalan 数, Motzkin 数, Schroder 数の Hankel 行列式とその q-analogue」というタイトルで話をし、10月に京都大学数理解析研究所で開催された「組合せ論的表現論の拡がり」という集会で、その内容をさらに発展させた内容の話をした。カタラン数のハンケル行列式は、直交多項式や basic hypergeometric series と深い関係を持ち、その方向から解釈することが自然である。

(2) 2008年5月16日から5月31日までエルウィン・シュレジンガー国際数理解析研究所 (ESI) で開催された研究集会『組合せ論と数理解析』に参加し、平面分割の数え上げ問題と対称関数についての研究発表を行った。また、2008年9月1日から5日まで名古屋大学多元数理解析科学科であった第8回名古屋国際数学コンファレンスにおいても平面分割の数え上げ問題に関して研究発表を行った。2008年9月7-11日に沖縄で開催された combin.jp SUMMER SCHOOL 2008 においては平面分割の数え上げ問題、行列式・パフィアン及び対称関数についての概説講演を行った。2008年10月7-10日に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会「組合せ論的表現論の拡がり」においても、その後の研究の進展について報告した。2009年2月22-25日にドイツのヘイルズブロンで開催された SLC62 に参加した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Masao Ishikawa, Hiroyuki Tagawa and Jiang Zeng, A q-analogue of Catalan Hankel determinants, RIMS Kokyuroku Bessatsu B11 (2009), 19-42, 査読有.

② Masao Ishikawa and Jiang Zeng, , The Andrews-Stanley Partition Function and Al-Salam-Chihara Polynomials, Discrete Math. 309 (2009), 151 - 175, 査読有.

③ Masao Ishikawa, Minor summation formula and a proof of Stanley's open problem, Ramanujan J. 16 (2008), 211-234, 査読有.

④ Masao Ishikawa, Anisse Kasraoui and Jiang Zeng, "Statistics on Ordered Partitions of Sets and q-Stirling Numbers" *SIAM J. Discrete Math.* 22 (2008), 1105 - 1137, 査読有.

⑤ Masao Ishikawa, Anisse Kasraoui and Jiang Zeng, Euler-Mahonian Statistics on Ordered Partitions and Steingrimsson's conjecture, RIMS Kokyuroku Bessatsu B8 (2008), 99-114, 査読有.

[学会発表] (計 10 件)

① 石川雅雄, Enumeration problems of plane partitions and determinant generating functions, 組合せ論的表現論の拡がり, 2008年10月7日-10月10日、京都大学数理解析研究所

② 石川雅雄, 平面分割の数え上げ問題と行列式・パフィアン, combin.jp SUMMER SCHOOL 2008, 2008年9月7日-9月11日、Culture Resort Festone (沖縄)

③ 石川雅雄, Catalan 数, Motzkin 数, Schroder 数の Hankel 行列式と, その q-analogue, 組合せ論サマースクール 2007, 2007年9月3日、カルチャーリゾートフェストーン

④ 石川雅雄, Enumeration problems of plane partitions and Pfaffian (determinant) expressions, Combinatorics and Representation Theory, 2008年9月1日-9月5日、名古屋大学・多元数理解析科学科

⑤ 石川雅雄, Littlewood's (Cauchy's) formulae of Schur functions and constant term expressions for the refined enumeration problems of TSSCPPs, Combinatorics and Statistical Physics, 2008年5月16日-5月30日、Erwin Schrodinger Institute (ウィーン)

⑥ 石川雅雄、An Identity for Compound Determinant and its Application、KAIST 談話会、2008年2月22日、Korea Advanced Institute of Science and Technology

⑦ 石川雅雄、Hankel determinants of Catalan, Motzkin and Schroder numbers and its q-analogues、組合せ論的表現論の拡がり、2007年10月23日

⑧ 石川雅雄、Refined Enumerations of Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions and Lattice Path Combinatorics、6th International Conference on Lattice Path Combinatorics and Applications、2007年7月13日、アメリカ合衆国ジョンソン市・東テネシー州立大学

⑨ 石川雅雄 & 田川裕之、Schur Function Identities and Hook Length Posets、The 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics、2007年6月4日、中華人民共和国天津市南開大学

⑩ 石川雅雄、Refined Enumerations of Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions and Constant Term Identities、The 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics、2007年6月2日、中華人民共和国天津市南開大学

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0件)

○取得状況 (計0件)

〔その他〕

<http://www.uec.tottori-u.ac.jp/~mi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石川 雅雄 (ISHIKAWA MASAO)

鳥取大学・教育センター・准教授

研究者番号：40243373

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

岡田 聡一 (OKADA SOICHI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：20224016