様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22　年　4　月　11　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007　～　2009
課題番号：19540034
研究課題名（和文）多様体上のベクトル束の研究

研究課題名（英文）Study of vector bundles on algebraic varieties

研究代表者　隅広　秀康（ SUMIHIRO HIDEYASU ）
広島大学･大学院理学研究科･名誉教授

研究者番号：60068129

研究成果の概要（和文）：Lange-Pauly による、種数が２以上の非特異射影曲線上の線束のフロベニウス写像の順像は半安定ベクトル束であるという結果の線束を（半）安定ベクトル束におよび代数曲線を非特異射影曲面に拡張した。これにより正標数での一般型非特異射影極小曲面の geography に関する新しい結果を得た。また、４次元射影空間上の階数２のベクトル束の線束への新しい分解定理を得た。

研究成果の概要（英文）：Lange-Pauly proved that the direct images of line bundles on non-singular projective curve with genus greater than or equal 2 are semi-stable. We extended this result to semi-stable vector bundles on non-singular curves and non-singular projective surfaces. As a corollary, we get a new result on geography of non-singular minimal surfaces of general type in positive characteristics. Further, We obtained a new theorem for rank two vector bundles on 4-dimensional projective space to split into line bundles.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2099 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学･代数学
キーワード：代数幾何学

1.研究開始当初の背景　Grauert-Schneider 予想、Hartshorne 予想など射影空間上のベクトル束の線束への分解問題は GIT に非常に重要な研究課題であると記述されているが、問題が提起されて約３０年が経過しているにもかかわらず殆ど未解決の状態である。

２．研究の目的 n 次元射影空間 P^n 上のベクトル束の分解問題に関する次の新しい予想１，２，３、を提起し
予想１：P^4 上の $c_1^2 - 4c_2$┌0 を満たす階数２のベクトル束は線束の直和である．ただし、

c_i は i 次チャーン数（ i＝1,2 ）である.
予想２：P^5 上の半安定でない階数２のベクトル束は線束の直和である.
予想３：P^n (n┌6)上の階数２のベクトル束は線束の直和である.
これら予想の研究を通して
Grauert-Schneider 予想：P^4 上の半安定でない階数２のベクトル束は線束の直和である。
Hartshorne 予想：P^n (n┌6)上の階数 r (r < n/3)のベクトル束は線束の直和である。
 など射影空間上のベクトル束の線束への分解問題の解決を目指す。

３.研究の方法　E を P^n 上の非常に豊富な階数２のベクトル束、X を E に付随する行列式多様体とすると、X は n−m 次元（ n =2m または n=2m +1）の P^n の非特異閉部分多様体である。D を E の tautological 因子の X への制限因子、H を P^n の超平面因子の X への制限因子、a を E の非安定度数とする、i.e. $H^0(E(-a))\neq 0$, $H^0(E(-(a+1)))=0$, このとき、$c_2(E(-a)) = (a^2-c_1a+c_2)H^2$ であるから、E が線束に分解することと $a^2-c_1a+c_2=0$ であることは同値である。また、X 上の因子 $Z=D-aH$、$Z^* = D-(c_1-a)H = Z+(2a-c_1)H$ を定義するとこれら因子は共に正因子であり、それらの交点因子 $Z\cdot Z^* = -(a^2-c_1a+c_2)H^2$ であるから、E が線束に分解することと X 上の因子 Z^* が numerically positive であることとは同値である。従って、新しく定義したベクトル束に付随する行列式多様体の代数･幾何学構造を研究することによりベクトル束の線束への分解を示す。

４．研究成果　E を $c_1^2-4c_2\geqq 0$ を満たす４次元射影空間 P^4 上の階数２のベクトル束とし、X を E に付随する行列式曲面とする。このとき E が線束に分解するための以下の新しい分解定理を得た。

定理１：E が線束に分解するには $\dim H^1(\mathrm{End}(E^{(q)}))\leqq O(q^1)$ であることが必要十分である。ただし、$E^{(q)}$ は次数 $q=p^n$（n＞＞0）の X のフロベニウス写像による $E|X$ の逆像である.
さらに、ベクトル束 $E|X$ と X 上の因子 D,H の間に成立する完全列および Riemann-Roch の定理を用いて、

定理２：E が線束に分解するには $\dim H^1(O_X(q(2D-c_1H))\leqq O(q^1)$ であることが必要十分である。故に、次の不等式が成立することが必要十分である。
$\dim H^0(O_X(q(2D-c_1H))\leqq((2D-c_1H)^2/2)q^2-((2D-c_1H)K_X/2)q + \chi = ((c_1^2-4c_2)(c_1^2-c_2)/2)q^2 + O(q^1)$. ただし、$K_X$ は X の標準因子である。従って、完備線形系 $|2D-c_1H|$ が既約因子を含めば上記不等式は成立するので、ベクトル束 E は線束の直和である。しかし残念ながら、完備線形系 $|2D-c_1H|$ が既約因子を含むことは示せなかった。

さらに、フロベニウス写像の順像の半安定性に関するいくつかの結果を得、応用として正標数での一般型非特異射影極小曲面の geography に関する新しい結果を示した。次の定理３は Lange-Pauly によって得られた代数曲線上の結果を代数曲面に拡張したものである。

定理３：X を代数閉体 k (char k ＝p ＞ 0) 上に定義された非特異射影代数曲面、H を X 上の numerically positive な因子で完備線形系 $|mH|$ が固定点を持たなく、非特異曲線をメンバーに持つものとする（ m >> 0 ）。このとき、X の微分１次形式のなすベクトル束 Ω^1_X が H に関して半安定で。$K_XH > 0$ ならば、X 上の任意の線束 L に対し、フロベニウス写像 F による順像 $F_*(L)$ および $F_*(\Omega_X\otimes L)$ は H に関して半安定である。

この定理３の証明において重要な役割を果たすのはフロベニウス写像に関する新しく導入された標準フィルトレーション $I^{\cdot}$ や $W^{\cdot}$ および標準接続である。

標準フィルトレーション：F を n 次元非特異射影代数多様体 X の絶対フロベニウス写像とする。$F_*(O_X)$ は O_X-代数であるから
自然な全射 $F^*F_*(O_X) \ni \alpha\otimes\beta \to \alpha\beta \in O_X$ の核イデアルを I とすると $F^*F_*(O_X)$ は自然な下降フィルトレーション
　$I^{\cdot}$:　$I^0\supseteq I^1\supseteq I^2\supseteq\cdots\supseteq I^m\supseteq\cdots$
を持ち、$\mathrm{Gr}(I^{\cdot})$ に関して次の結果が従う。

定理４：（１）$I^{n(p-1)} \cong K_X^{\otimes(p-1)}$, $I^{n(p-1)+1}\cong 0$
（２）$I^i/I^{(i+1)} \cong S^i(\Omega_X^1)$（ $0\leqq i\leqq p-1$ ）
（３）$I^{n(p-1)-i}/I^{n(p-1)-i+1} \cong K_X^{\otimes(p-1)}\otimes(I^i/I^{i+1})^{\vee}$（ $0\leqq i\leqq n(p-1)/2$ ）　ただし、$E^{\vee}$ はベクトル束 E の双対ベクトル束である。
（４）特に、X が代数曲面のとき
　$I^i/I^{i+1} \cong S^i(\Omega_X^1)$（ $0\leqq i\leqq p-1$ ）
　$I^i/I^{i+1} \cong K_X^{\otimes(i-p+1)}\otimes S^{2p-2-i}(\Omega_X^1)$（ $p\leqq i\leqq 2p-2$ ）

X 上のベクトル束 E に対し上記下降フィルトレーション $I^{\cdot}$ を用いて $F^*F_*(E)$ に下降フィルトレーション $W^{\cdot}$ を次のように定義できる。
$W^{\cdot}$: $F^*(F_*(E))\supseteq F^*(F_*(E))\cdot I\supseteq F^*(F_*(E))\cdot I^2\supseteq\cdots\supseteq F^*(F_*(E))\cdot I^i\supseteq\cdots$
この下降フィルトレーション $W^{\cdot}$ を $F^*(F_*(E))$ の標準フィルトレーションという。

定義より $\mathrm{Gr}^i(W^{\cdot}) = \mathrm{Gr}^i(I^{\cdot})\otimes E$ であるから

$F^*(F_*(E))$の標準フィルトレーション $W^\cdot$に関して次の系が従う。

系
（１）$W^i/W^{i+1} \cong E\otimes S^i(\Omega_X^1)$ （ $0 \leqq i\leqq p-1$ ）
(2) $W^i/W^{i+1}\cong E\otimes K_X^{\otimes(i-p+1)}\otimes S^{2p-2-i}(\Omega_X^1)$
（$p \leqq i\leqq 2p-2$ ）

定理５：X を代数閉体 k (char k ＝p > 0) 上に定義された非特異一般型極小射影代数曲面で X の１次微分形式のなすベクトル束Ω^1_Xが標準因子 K_Xに関して半安定であるとする。
（１）(Bogomolov's inequality) Ω^1_X が標準因子 K_X に関して強安定であるとき，i.e. 任意の自然数 e に対して$(F^e)^*(\Omega^1_X)$が K_Xに関して半安定である。このとき、X の geography に関する次の不等式が成立する。

$$C_1(X)^2 \leqq 4C_2(X)$$

（２）ある自然数 e に対して$(F^{(e-1)})^*(\Omega_X^1)$は K_Xに関して半安定、$(F^{(e)})^*(\Omega_X^1)$は半安定でないとき、X の geography に関する次の不等式が成立する。

$$C_1(X)^2 \leqq (4p^{2e}/p^{2e}-(p-1)^2)C_2(X)$$

特にいずれの場合でも、$C_2(X) > 0$ を得る。

標準接続 ： X を代数閉体 k (chark = p > 0)上に定義された n 次元射影代数多様体とする。X 上の quasi-coherent sheaf E に対して $F^*(E)$の接続$\nabla: F^*(E) \to F^*(E)\otimes\Omega_X^1$を次のように定義できる。

局所的に $\nabla(e\otimes f) = e\otimes d(f)$

従って、この接続は正標数での Gauss-Manin 接続に他ならない。この $F^*(E)$上の接続を$F^*(E)$の標準接続という。特に E を X 上のベクトル束とするとき、標準フィルトレーション $W^\cdot$と標準接続∇との間には次の関係が成立する。

定理６： （１）$\nabla(W^i) \subseteq W^{i-1}\otimes\Omega_X^1$,
（２）$\nabla^i: W^i/W^{i+1}= E\otimes I^i/I^{i+1} \to E\otimes I^{i-1}/I^i\otimes\Omega_X^1=W^{i-1}/W^i\otimes\Omega_X^1$ （ $0 \leqq i\leqq n(p-1)$ ）を∇から導かれるO_X準同形射とすると、∇^iは単射である。従って、ベクトル束 W^i/W^{i+1}は O_X準同形射$\nabla^1 \circ\circ\circ \nabla^{i-1}\circ\nabla^i$ を通して $E\otimes(\Omega_X^1)^{\otimes i}$ の subsheaf と見なせる。

また正標数での小平消滅定理として以下の結果を得た。

定理７：
（１）X を代数閉体 k (chark = p > 0)上定義された非特異射影代数曲面、H を numerically positive な X 上の因子とし、Ω_X^1 が H に関して半安定、$K_XH > 0$ とする。このとき、X 上の豊富線束 L に対して $c_1(L)H > (1/2p)K_XH$ ならば、次の消滅定理が成立する。$H^1(X,L^{-1}) = 0$.
（２）X を代数閉体 k (chark = p > 0)上定義された非特異一般型極小射影代数曲面とし、Ω_X^1 が K_Xに関して半安定とする。このとき、X 上の numerically positive な因子 D が $DK_X > (1/2p)K_X^2$ を満たすならば、$H^1(X,O_X(-D)) = 0$. 従って、$K_X^2 < 4p^2$ ならば、任意の numerically positive な因子 D に対して $H^1(X,O_X(-D)) = 0$。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
(1)Akira Ishii, Kazushi Ueda, Hokuto Uehara, Stability conditions on A_n singularities, J. Differential Geometry, 査読有り, Vol.84, 2010, pp87-126
(2) Akira Ishii, Kazushi Ueda, On moduli spaces of quiver representations associated with dimmer modules, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有り, Vol.9, 2008, pp127-141
(3) Yukinori Kitadai, Hideyasu Sumihiro, Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms, Tohoku Math. J. 査読有り、Vol.60, ,2008, pp 287-301
(4) Yukinori Kitadai, Hideyasu Sumihiro, Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms II, Hiroshima Math. J. 査読有り、Vol.38, ,2008, pp 241-261

〔学会発表〕（計５ 件）
(1) Akira Ishii, Dimer models and tiling bundles, Complex Algebraic Geometry, Mathematishes Forshungsitut Oberwolfach, Germany, ２００９年１０月１日
(2) Akira Ishii, Dimer models and special McKay correspondence, Algebraic Triangulated Categories and Related Topics, 京都大学数理解析研究所, ２００９年７月２４日
(3) Akira Ishii, Dimer model and the special correspondence, An International Conference in Algebraic Geometry, 東京大学，２００８年１２月１９日
(4) Akira Ishii, Stability condtitions on A_n singularities, ICTS Conference on Vector Bundles, TIFR. , Mumbai India, ２００８年３月７日
(5) Akira Ishii, Brane tilings and crepant resolutioins of some three-dimensional toric singularities, Categorical Aspects of Algebric Geometry in Mirror Symmtry, 京

都大学数理解析研究所 ,２００７年１２月７日

６．研究組織

(1)研究代表者

隅広　秀康　（　Hideyasu Sumihiro　）
広島大学･大学院理学研究科･名誉教授
研究者番号：60068129

(2)研究分担者

石井　亮　（ Akira Ishii　）
広島大学･大学院理学研究科･准教授
研究者番号：10252420

木村俊一　（ Shunichi Kimura ）
広島大学･大学院理学研究科･准教授
研究者番号 ： 10284150
（ H20 → H21 ）

北台如法　（ Yukinori Kitadai ）
広島大学･大学院工学研究科･特任助教
研究者番号 ： 30511563
（ H20 → H21 ）

(3)連携研究者

（　）

研究者番号：