様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年５月２５日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2008
課題番号：19540035
研究課題名（和文）　代数曲線上の特殊線形系の理論と応用の研究

研究課題名（英文）　Linear Systems on Algebraic Curves and its Applications

研究代表者
大渕　朗(OHBUCHI AKIRA)
徳島大学・総合科学部・教授
研究者番号 10211111

研究成果の概要：
第五回代数曲線論シンポジウム（徳島大学工学部にて 2007 年 11 月 24 日（土）－11 月 25 日（日））、第六回代数曲線論シンポジウム（神奈川大学工学部にて 2008 年 12 月 15 日（月）－ 12 月 18 日（木））を開催し、幅広い情報提供を行った。また神奈川工科大学の米田二良や大阪大学大学院の春井岳との共同研究で平面曲線の最少次数モデルの評価式に関する興味深い結果を得ることに成功した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,500,000 円	450,000 円	1,950,000 円
2008 年度	1,300,000 円	390,000 円	1,690,000 円
年度			
年度			
年度			
総　計	2,800,000 円	840,000 円	3,640,000 円

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何

１．研究開始当初の背景
この研究は平成１９年度から二年間に渡り科学研究費補助金を得て行なわれた。

完備な一次元代数多様体を一般には代数曲線と呼ぶが、この代数曲線は幾何学的にはコンパクト一次元複素多様体と見なすことが出来、研究対象としては或る意味で非常に扱いやすいものである。そのため、代数幾何学に限らずいろいろな分野、例えば函数論、射影幾何学、可換環論、整数論、或いは情報理論など多岐に渡って古くから応用されている。しかしその扱われる歴史が長いということもあり、それぞれの、例えば函数論、射影幾何学、可換環論、などで開拓されてきたテクニックはもう少し改良されていく事も望ましい、というのも否めない事実である。面白いことに、こういった様々な分野では、代数曲線は同値な概念であるにもかかわらず、その分野固有の考え方で取り扱うため随分異なった常識で取り扱われて居り、新鮮なアイデアに満ちているのであるが、それにもかかわず意外に他分野に於ける代数曲線の取り扱われ方には関心が払われることが少ない。

代表者はセヴェリ予想に関連した代数曲線上の特殊線形系の族のなす多様体 に関する研究やワイアシュトラス点の研究を主に扱ってきたが、先に述べたような事情もあり、代表者が従来行ってきた固有のテクニックや考え方に固執するのでなく更に広い視点に立った考察する必要性を強く感じている。

そのため、代数曲線の様々な分野に於ける応用や逆に他分野からの応用の可能性などを見るために、二年に渡って代数曲線を中心のテーマに据えた研究集会を行ってきた。

２．研究の目的

代数曲線論についての理論は歴史が古くヤコビ，アーベル, ワイアシュトラスやリーマン等が扱って以来, 複素関数論や代数幾何学の中で扱われる分野の１つであるが, それだけでなくヴェイユなどの貢献により整数論の研究でも使われる理論である。また近年では工学的な応用を期待して代数曲線符号とか代数曲線暗号といった研究も行われている。しかも近年では様々な分野での問題を代数曲線の情報に置き換え研究するという結果も見られるようになり, 代数曲線についての詳細な研究は急務だと言えるであろう。

・山口大学の加藤崇雄教授が研究する一変数複素関数論の理論, 神奈川工科大学の米田二良教授の研究するワイアシュトラス半群の理論或いは神奈川大学の本間正明教授の研究する符号理論は代数曲線論の重要なテーマの一つである。申請者は加藤教授, 米田教授と共に共同研究を行なっており, また本間教授の協力による研究も行っており, これらは全て成果を出す事に成功している。

このようにお互いに協力、研究するべき対象を持つ代数曲線の専門家が揃った事は非常に好運な事である。そのため申請者はお互いの関連する研究を進める事, それだけでなく更なる発展を期して、代数曲線を主たるテーマとするが出来るだけ幅広い視点に立った「代数曲線論シンポジウム」の実施を考え, 申請者は以下の目的の下で研究を行いたいと考えた。

・第一に加藤教授との共同研究の発展である。これは代数曲線上の特殊線形系のなす多様体 $W_d^r(C)=\left\{\mathrm{L}\in \mathrm{Pic}^{\mathrm{d}}(C)\,|\,\dim\Gamma(C,\mathrm{L})\geq r+1\right\}$ の性質から代数曲線の詳細な分類を行うという立場のものである。$r=1$ の場合は曲線のゴナリティー（クリフォード指数）という不変量からの分類の問題と密接な関係がありマルテンスやコッペンスと言った人たちの研究が知られていてクリフォード指数の言い方で言えばクリフォード指数33までの分類は済んでいるので研究は進んでいると見なせる。この問題に関し, 加藤教授と共にあまり言及されることがなかった $r=2$ の場合（或いは広く $r\geq 2$ の場合, これらで特に一般のメンバーが biraitonal であるような場合が重要になる）に何が起きるかを調べるという計画を立てている。birational であるような g_d^2 について, このような d の最小値 $s_C(2)$ は $g+2$ 以下（g は曲線の種数）が知られているが $s_C(2)=g+2$ と $s_C(2)=g+1$ の分類は簡単で, 本質的には $s_C(2)\leq g$ が問題となる。今回最近加藤教授との共同研究として完成した $s_C(2)=g$ の分類を受けて $s_C(2)\leq g-1$ の研究を申請期間内に行う。手法的には $s_C(2)=g$ の分類の手法を踏襲する予定なのであるが, 間違いなく種数 g が大きい場合は比較的簡単な一般論で解決して種数 g が小さい場合は問題自体が trivial になり、中間の値での分類が困難を極めるだろうと思われる。出来たら一年目の早い時期に種数 g が大きい場合の分類を完成して, 中間の値での分類に取り掛かりたい。その場合に論理的に例外的に扱わなくてはいけない幾つかの場合が出てくると予想される。一番の問題点は「論理的に例外的に扱わなくてはいけない幾つかの場合」が実際に存在するのかどうかの構成の問題である。$s_C(2)=g$ の場合と同じように議論が進むのであれば三次元有理代数多様体上の因子の完全交叉として得られる代数曲線が有力な候補者になるので, その方針で分類を完了させたいのが大まかな方針である。この内容はゴナリティー（クリフォード指数）とは違った視点での分類理論になり, 実際に得られる結果もゴナリティー（クリフォード指数）で求められる分類表とは違うタイプの分類表を得るので応用上有益と思われる。

３．研究の方法

本研究は代数曲線上の特殊線形系に関する研究である。代数曲線論についての理論はJacobi,AbelやRiemann等が扱って以来代数幾何学の中では大きな柱をなす分野の１つである。研究の対象となる事柄としては代数幾何的な話題だとモジュライの理論、ベクトル束の研究や直線束の族の幾何学的研究などが考えらる。申請者はその代数曲線の理論に於いてはspecial divisorの構成や代数幾何的性質を調べる事（直線束の族の幾何学的研究）に関心を持っている。

具体的には代数曲線の特殊線形系の族のなす多様体$W_d^r(C)$やクリフォード指数などの問題である。詳しくいうと$W_d^r(C)$は集合として

$$W_d^r(C)=\left\{\mathrm{L}\mid \mathrm{L}\in \mathrm{Pic}^{\mathrm{d}}(C),\dim\Gamma(C,\mathrm{L})\geq r+1\right\}$$

と定義されるものであるが(正確なscheme論的な定義は、M.Cornalba, P.A.Gri・ths, J.Harris,［2］p.176を参照)この構造について、古くからSeveri予想として知られていた予想が存在していた。それは

$W_d^r(C)$は各componentの次元が$g-(r+1)(g-d+r)$というものであった。残念ながらこれは正しい予想ではないことが解り、正しい結果としてはKleimanとLaksovによる1972と1974の論文の結果から

$C\in \mathrm{M}_g$が一般の元なら$W_d^r(C)$は各componentの次元が$g-(r+1)(g-d+r)$であった。しかしながら、ここでいう「一般」という概念は種数gの代数曲線のモジュライの中で或る開集合$U\subset \mathrm{M}_g$が存在して$C\in U$ならは$W_d^r(C)$は各component の次元が$g-(r+1)(g-d+r)$という事を主張しているに過ぎず､或る開集合$U\subset \mathrm{M}_g$とはどのような集合であるか、或いは一般の$C\in \mathrm{M}_g$を具体的に書き下すことについては何も述べられていない｡従って､この内容を受けると｢一般の$C\in \mathrm{M}_g$」を具体的に書き下すことは大変重要な意味があると思われ、この観点から代数曲線の分類（一般である、一般でないの二種類に分類して一般でない場合を全て書き下すという立場）を行うというのが一つの目的になっている。

また米田の既に出版されている有限生成４-半群が全てワイアシュトラス点の半群になっている、という定理に対して、torus embeddingの一般論を用いて存在のみが示されていたタイプに関して、代数曲線上のワイアシュトラス点を(例えば超楕円曲線の二重被覆面としてのように)構成的に作る、という問題が存在する。これに関して超楕円曲線のn重被覆面である超楕円曲線の二重被覆面として構成可能であると示した。この結果は以前掲載された内容であったが、議論にミスがあったため新しく議論を構築しなおしている。

更に代数曲線C上に固定点のないbirationalなネットg_d^2が存在する条件はペンシルの場合と異なり曲線がどのような曲線の被覆面であるかに依存する概念と予想されるが、これに関する極めて重要な反例を発見した。

４．研究成果

代表者は成19年12月19日-22日に徳島大学総合科学部に於いて、平成20年12月16日-17日に神奈川大学工学部に於いて第五回と第六回の研究集会「代数曲線論シンポジウム」を開催し,代数曲線とその関連のある研究を行っている研究者との意見交換を図った。それらの成果は別紙として添付する。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

①Akira Ohbuchi On Double Covering of a Pointednon-singular Curve with any Wyerstrass Semigroup, Tukuba Journal of Mathematics, 30, 2007, 43-54

②Akira Ohbuchi On the Castelnuovo -Severi inequality for a double covering, Algebraic Geometry in East Asia II (Hanoi), 1, 2007, 11-29

③Akira Ohbuchi Double coverings between smooth plane curves,Kodai Mathematical Journal, 31,2008, 257-262

④Akira Ohbuchi Existence of the non-primitive Weierstrass gap sequences on curves of genus 8,Bull. Braz. Math. Soc., 1, 2008, 109-121

〔学会発表〕（計　２　件）

①大渕 朗, 種数9の4-gonal curveについて
高知大学理学部

②大渕 朗, On tetragonal curve of genus 9
九州大学代数幾何シンポジウム

〔図書〕（計０件）

６．研究組織
(1)研究代表者
大渕　朗(OHBUCHI AKIRA)
徳島大学・総合科学部・教授
研究者番号 10211111

(2)研究分担者
加藤崇雄 (KATO　TAKAO)
山口大学・理学部・教授
研究者番号 10016157

米田二良 (YONEDA　JIRYO)
神奈川工科大学・工学部・教授
研究者番号 90162065

酒井文雄 (SAKAI FUMIO)
埼玉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 80145523

本間正明 (HONMA　MASAAKI)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号 40036596

(3)連携研究者