

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目:基盤研究(C)

研究期間:2007~2009

課題番号:19540037

研究課題名(和文) 高次元の有理連結代数多様体の多角的研究

研究課題名(英文) Research on rationally connected varieties

研究代表者

佐藤 栄一 (SATO EIICHI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号: 10112278

研究成果の概要(和文):

高次元多様体 X の解明のため、超平面切断したアンプル因子 A と元の X との関係に関し「 A がコニック束のとき、 X も束構造が遺伝するか」及び「 A のブローダウンの性質が、 X にも遺伝するか」の研究を行った。

更に一般化した「端曲線も同様 X に遺伝するか」を考察した。その応用として「非特異射影代数多様体の無限増大列 $\{X_n\}$ (n は自然数)」で X_n は X_{n+1} はアンプル因子と仮定する。そのとき X_1 がファイバー構造 $f: X_1 \rightarrow Y$ を持てば、任意の n で帰納的に射 $f_{\{n-1\}}: X_{\{n-1\}} \rightarrow Y$ は射 $f_{\{n\}}: X_n \rightarrow Y$ に持ち上がる。そのファイバーは荷重完全交叉になる。結果としてその構造がある種の「対称性」を持つことが示される。

研究成果の概要(英文):

For the study of higher dimensional algebraic variety X we take a hyperplane section A of X for the use of Lefschetz Theorem and try to find the structure of X by the one of A . This time we studied whether the bundle structure of A is preserved to X and next the structure of blowing-up is also so. Moreover generalizing the method, we investigate the preservation of the extremal ray. As applications we get the following: Theorem. Let us consider a sequence $\{X_n\}$ of smooth projective varieties so that X_n is an ample divisor in X_{n+1} for each n . Here n runs over each positive integer. Assume X_1 has an elementary contraction $f: X_1 \rightarrow Y$ with $\dim X_1 - \dim Y > 1$ and $\dim X_1 > 2$. Then for each n there is an inductively extended morphism $f_n: X_n \rightarrow Y$ with $f_{\{n-1\}} = i_{\{n-1\}} f_n$ where $i_{\{n-1\}}: X_{\{n-1\}} \rightarrow X_{\{n\}}$ is a natural embedding. For a very general point y of Y a smooth fiber of f_n is a weighted complete intersection for large enough n . The above theorem says that a variety enjoying a sequence $\{X_n\}$ of smooth projective varieties has the structure of property "symmetry".

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有理曲線、単有理性、ファノ多様体、コニック束、レフシェッツの超平面切断

1. 研究開始当初の背景

双有理の視点から小平次元マイナス無限大
多様体の世界を眺めると有理連結多様体 >
単有理多様体 > 有理多様体の部分族があ
る。その様相・含有関係は半世紀以上の現在
さえ不明確だ。

双正則的問題であるファノ多様体の構造解
明等、近年の急速な進展に比較し、双有理問
題は「有理・単有理を判定理論」も含め、未
解決のまま。実際「有理は単有理に真に含
まれる」は70年代に示された。

申請者は小平次元マイナス無限大の高次元
多様体の構造の決定、特に束構造のタイプ、
アンブル(ネフ)因子の性質の元の多様体へ
の遺伝(レフシェッツ型定理)の研究をし、知
見を得た。双正則の視点での問題で、考察対
象の部分多様体の族を(高次)変形理論を用
いて解析する重要性を認識した。かくして
「高次元代数多様体の小平次元マイナス無
限大の世界を、その部分族の有理連結多様体
(=任意の2点が有理曲線で張られる)を媒体
に、その上の有理曲線族で解析する。特に 双
正則・双有理の両視点でその有り様を理解し、
高次元多様体の明解な「双有理的」分類の概
念図作成)を行うのは重要な意味がある。

2. 研究の目的

上記の問題意識のもとに以下を研究目的と
する。

研究1. (1.1) ファノ多様体上の(最)小次数
の有理曲線族のパラメータ空間考察。(1.2)
その空間内で特異曲線になる。

部分族の次元考察(1.3)非負接束射影多様体
は等質空間?(双正則問題)

研究2. X を非特異射影多様体、 A を非特異ア
ンブル因子とする。(2.1) A が、ファノ及び
(単)有理のとき X にその性質は遺伝するか。
研究3. (双有理的視点)「予想:(3次元)ファ
ノ多様体 X は単有理か?申請者は 予想:3
次元で 有理連結は単有理?及び 単有理は
smoothな変形不変?に取り組む。有理曲線族
の挙動考察に中間ヤコビ多様体に還元する
理論面の考察と、具体的 3-fold の単有理判
定に多項式数式処理をする(研究3)

3. 研究の方法

当該研究のため関係者を箱崎代数幾何学セ
ミナーで講演依頼、また2009年2月に研究
集会「代数幾何学 in 九州」を開催し、議論
を深めた。特に申請者は「Unirationality and
rationally-connectedness」を講演。しかし
研究3に直接迫る結果にはいたっていない。

4. 研究成果

以下の成果を得た。

(1) 研究2: 高次元多様体 X の解明には、
超平面切断した1次元低いアンブル因子 A
の情報から、元の X との関係に関し「 A のブ
ローダウンの性質が、 X にも遺伝するか」の
研究を行い、同時にそのため「 A がコニック
束のとき、 X もほぼ同様に束構造が遺伝す
る」ことも示し論文として出版。

(2) 更に研究2でアンブル因子 A の端曲線
が X にも遺伝するかの考察を行った。特に A
が束構造を持てば、 X も自然な束構造を持つ

を得た。一方ブローダウン(=射影射)の場合は、 X は射影射の遺伝がわからず、非ケーラー考察の必要性がわかった。論文作成中。これより「予想：アンプル因子 A が「単有理」なら、 X も同じ性質を持つか」について研究集会講演「有理連結と単有理」では強い条件のもと X が単有理を得た。しかし満足いく結果ではない。

(3) 共同研究。多次数付き代数とその三角部分代数の F -有理性と F -正則性を研究し、代表者はその中で有効な「一般型曲面から誘導される具体例」構成に寄与し、共同論文を出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Kazuhiko Kurano, Eiichi Sato, Anurag K. Singh, and Keiichi Watanabe, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities., *Journal of Algebra*, Vol. 322 No. 9, 3248–3267, (2009), 査読有
- ② Eiichi Sato, Hyperplane section principle of Lefschetz on conic-bundle and blowing-down, *Kodai Mathematical Journal*, Vol. 31 No. 3, 307–322, (2008), 査読有
- ③ Kazuhiro Yokoyama, On systems of algebraic equations with parametric exponents II, *Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing*, 18, 603–630, (2007), 査読有
- ④ Takayama Shigeharu, On the invariance and the lower semi-continuity of plurigenera of algebraic varieties, *J. Algebraic Geom.*, 16, 1–18, (2007), 査読有
- ⑤ Mourougane Ch. and Takayama Shigeharu, Hodge metrics and positivity of direct images, *J. Reine Angew. Math.*, 606, 167–178, (2007), 査読有

[学会発表] (計 11 件)

- ① 佐藤 栄一, Rationally connected

varieties, The 2nd Kyushu University/POSTECH Joint Workshop – Algebraic Geometry and Related Topics –, 2010年3月15日, 九州大学

- ② 佐藤 栄一, Infinitely dimensional projective varieties and families of rational curves, 第5回代数・解析・幾何学セミナー, 2010年2月15日, 鹿児島大学
- ③ 佐藤 栄一, Unirationality and rationally-connectedness, 代数幾何学 in 九州, 2009年2月4日, 九州大学
- ④ Eiichi Sato, Lefschetz hyperplane section theorem on Mori-Kleiman cone and its application to conic bundles, 2nd NIMS School in Algebraic Geometry, 2008年5月15日, KAIST (韓国)
- ⑤ 佐藤 栄一, Lefschetz hyperplane section theorem on Mori-Kleiman cone and its application to conic bundles, 代数幾何学セミナー, 2008年4月24日, 九州大学
- ⑥ Takayama Shigeharu, Hodge metrics and the curvature of higher direct images, *Complex geometry in Osaka*, 2007年11月2日, 大阪大学
- ⑦ Takayama Shigeharu, Boundedness of pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, *Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces*, 2007年9月4日, 北海道大学
- ⑧ Kazuhiro Yokoyama, Primary decomposition and related topics I, II, *Summer School on SINGULAR and Applications*, 2007年6月4日, 6日, カイザースラウテルン大学(ドイツ)
- ⑨ 古島 幹雄, Non-projective compactifications of C^3 , 平成19年度多変数関数論冬セミナー, 2007年12月24日, 富山大学
- ⑩ 佐藤 栄一, Hyperplane section principle of Lefschetz on Mori cone, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2007年9月10日, 九州大学
- ⑪ 佐藤 栄一, 端射線に関する超平面切断定理, 早大理工代数幾何学セミナー, 2007年7月13日, 早稲田大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 栄一 (SATO EIICHI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：10112278

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

古島 幹雄 (FURUSHIMA MIKIO)

熊本大学・理学部・教授

研究者番号：00165482

横山 和弘 (YOKOYAMA KAZUHIRO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：30333454

高山 茂晴 (TAKAYAMA SHIGEHARU)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20284333