

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540040

研究課題名(和文) 数式処理ソフトを利用した保型形式と保型関数の理論の研究

研究課題名(英文) Research on the theory of modular forms and modular functions using Mathematica

研究代表者

小池 正夫 (KOIKE MASAO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：20022733

研究成果の概要(和文): extremal な保型形式と特別な形のテータ級数の間に2べきと3べきを法とする合同式を見つけた。この応用として、ウェイトが $n/2$ の extremal な保型形式の $2n$ 乗根は少なくとも1つの非整数なフーリエ係数を持つことを示した。

$f(z)$ をレベル2の合同部分群のハウプトモジュールで無限遠点のカuspでゼロ点を持つものとする。この $f(z)$ からアトキンの方法で2進的保型形式 F を構成できることを示した。 F を $f(z)$ のべき級数として展開すると、この係数は2進整数で、その2進位数が簡単な公式で計算できることを示した。

研究成果の概要(英文): We find the congruences between extremal modular forms and theta series of special types modulo powers of 2 and 3. This assertion enables us to prove that $2n$ -th root of the extremal modular forms of weight $n/2$ have at least one non integer coefficient.

Let $f(z)$ be a Hauptmodul for level 2 congruence subgroup that has zero at the cusp infinity. We construct the 2-adic modular form F from $f(z)$ by using Atkin's method. We expand F as a formal power series in $f(z)$. We can compute explicitly the 2-adic ordinal of these coefficients of the f -expansion of F .

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	500,000	150,000	650,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2000,000	600,000	2600,000

研究分野: 数学

科研費の分科・細目: 代数学

キーワード: 保型形式、保型関数、 p 進整数、 p 進的保型形式、マッカイ・トンプソン級数、extremal な保型形式

1. 研究開始当初の背景

1変数の保型形式、保型関数の数論的な性質は既に数多く見つけられているようだが、数式処理ソフトを利用することで多くのデータを集めて、新しい性質を見つけれられる環境にある。その例と

して次の場合がある。モジュラー不変量 $j(z)$ はムーンシャインの発見でマッカイ・トンプソン級数の特別な場合ととらえることができた。マッカイ・トンプソン級数に広げて数論的な性質を探る興味が生まれた。

2. 研究の目的

を数式処理ソフト Mathematica を利用して、多くのデータを集めて、新しい規則を発見すること。

3. 研究の方法

次のテーマごとに調べる。

(1) モジュラー群に関する extremal な保型形式のフーリエ係数を計算して、その数論的な性質を探る。

(2) モジュラー不変量 $j(z)$ を含むマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の素数 2,3,5,7 に関する可除性を調べる。

(3) レベル 2,3,5,7,11 のモジュラー方程式が多項式型となるものをマッカイ・トンプソン級数の中で探す。

(4) マッカイ・トンプソン級数からアトキンの方法で得られる p 進的保型形式の係数の p 進的な性質について調べる。

(5) レベル 2 のフリッケ群に対して超特異多項式を計算して、その数論的な性質を探る。

4. 研究成果

(1) Extremal な束に付随する保型形式のフーリエ係数は全て整数である。その n 乗根のフーリエ係数がまた整数であるような n がスローンらによって調べられていた。 n が 2 べきまたは 3 べきの場合に、束がないときでも extremal な保型形式が単純なテータ級数と 2 べきまたは 3 べきを modulo として合同式が成り立つことが証明できた。それは今までには知られていない種類の合同式であった。それを利用してスローンらの結果に次のような発展を追加することができた。ウェイトが k の extremal な保型形式の $4k$ 乗根は必ず整数でないフーリエ係数をもつことが証明できた。またウェイトが k の extremal な保型形式の $6k$ 乗根も必ず整数でないフーリエ係数をもつことが証明できた。それを論文として出版した。レベル 2 のフリッケ群に対しても、extremal な保型形式について似たような単純なテータ級数との間の合同式の存在を示す数値実験を重ねている。

(2) モジュラー不変量 $j(z)$ を含むマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の素数 2,3,5,7 に関する

可除性に関する計算のデータを大量に得た。位数が 2 べきのモンスターの元が付随するマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の 2 のべき乗で割れる様子に類似性がみられる。同様に、位数が 3 の元と、2 のべき乗をするとその元になるようなモンスターの元が付随するマッカイ・トンプソン級数たちのフーリエ係数の間に 2 のべき乗で割れる様子に類似性が見られることが観察された。位数が奇数の元についても、それに付随するマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の 2 のべき乗で割れる様子について、同様な性質が成り立つことが観察できた。この類似性が生じる理由については研究成果 (4) で得られた、マッカイ・トンプソン級数から得られる 2 進的保型形式が一致していることと関係があることがわかった。

(3) レベル 2,3,5,7,11 のモジュラー方程式が多項式型となるものをマッカイ・トンプソン級数の中で探すことができた。レベル 2 の場合はエルキースが求めていたリストに更に追加する例があることを見つけた。モジュラー方程式が多項式型になっている場合は研究成果 (4) でヘッケ作用素 $U(2)$ のべき乗を作用して得られる $f(z)$ の多項式を計算する時に利用できた。

(4) アトキンがモジュラー不変量 $j(z)$ に適用して 2 進的保型形式を求めた方法をレベル 2 のマッカイ・トンプソン級数に適用して 2 進的保型形式を求めて、それらが一致することを示した。さらにこの 2 進的保型形式が同じレベル 2 の保型関数 $f(z)$ で、無限遠点のカusp で 1 位のゼロ点、有理点 0 で 1 位の極をもつものにヘッケ作用素 $U(2)$ のべき乗を作用して得られる $f(z)$ の多項式を利用することで、係数が 2 進数であるような f のべき級数として構成できることが示された。この f のべき級数として展開したときの係数は 2 進整数で、その 2 進位数が簡単な公式をもつことを証明できた。保型形式のフーリエ係数が難しい性質を持つことに比べると、このような簡単な公式が存在することは不思議な結果である。この結果を論文で発表した。 $f(z)$ の $U(2)$ のべき乗の作用を調べるには、 $f(z)$ の n べき乗に $U(2)$ を作用して得られる $f(z)$ の多項式 $S(n)$ を調べることから攻めた。この多項式の係数の 2 進的なよい評価を得るための新しい方法を見つけることができた。この多項式の k 次の項の係数をこの評価で得られる部分を 2 のべき乗として取り出し、残りの部分が定める n の関数は n の多項式になる。この多項式を定めることができた。その結果を観察すると、すべての

k について、n が因子として必ずあることが証明できた。この現象をモジュラー群以外のフックスのいくつかの例で数値実験をすると、同様の性質が成り立つことを観察することができた。証明できれば面白いが、まだだてがかりがない。位数が2べきのモンスターの元に付随するマッカイ・トンプソン級数にアトキンの方法を適用して2進的保型形式が得られる場合はすべて上と同じ2進的保型形式と一致することが示せた。マッカイ・トンプソン級数からアトキンの方法では、自明にゼロになり2進的な保型形式が得られない場合にも、上に述べた $f(z)$ のように、無限遠点で1位のゼロ点を持つようなハウプトモジュールからは2進的な保型形式が存在することが見つかった。それらも、上と同じ2進的保型形式になる。これらの結果は、研究成果(2)で得られたマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の2のべき乗で割り切れる様子のもつ規則性を説明するものと期待できる。研究成果(2)で得られた他のマッカイ・トンプソン級数の2のべき乗で割れる様子の規則性の背後には2進的保型形式の存在が予想される。実際レベル6のフックス群に対応するマッカイ・トンプソン級数からはアトキンの方法で今までとは異なる2進的保型形式が構成できることがわかっている。2進的保型形式で得られた結果が、 $j(z)$ からアトキンの方法で得られる3進的保型形式についても同様の結果が得られることを示すデータを数値実験で得ることができている。この場合にもレベル3の保型関数 $g(z)$ で無限遠点で1位のゼロ点、有理点0で1位の極をもつものを利用すればよい。これにヘッケ作用素 $U(3)$ のべき乗を作用させて得られる $g(z)$ の多項式を利用して、係数が3進数である $g(z)$ のべき級数として構成できることはわかった。その係数の3進位数が簡単な公式で表されることを実験的には確かめることができたが、まだ証明までには至っていない。この場合にも、 $f(z)$ の場合のように、 $g(z)$ の n べき乗に $U(3)$ を作用して得られる $g(z)$ の多項式の係数の3進的な評価は得られた。この係数について、2の時と同様に、n の関数の部分に n が因子として現れることを実験的には確かめることができたが、証明には至っていない。

(5)レベル2のフリッケ群の場合に超幾何型の微分方程式の解をガウスの超幾何関数を用いて具体的に表す結果をすでに得ていた。それを利用してレベル2のフリッケ群に付随する標数pの不変微分を有限体の超幾何多項式で計算することができた。これからレベル2のフリッケ群に対

して超特異多項式を定義し、計算することができた。 $t_2A(z)$ に対するクロネッカーの合同式を使えば、この超特異多項式も素体上高々2次の方程式で因数分解できることがわかる。超特異多項式が素体上1次式で因数分解できるという性質を満たす素数の集合は、ベビーモンスターと呼ばれる散在的単純群の位数を割る素数の集合と一致するという事実を観察することができた。これらはモジュラー群に対して既に研究されている超特異多項式を持つ数論的な性質が、この場合にも成り立つことを示している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① M. Koike, On 2-adic modular forms, Kyushu J. Math., 64 (2010), 199–214. 査読有
- ② E. Bannai and T. Miezaki, Toy models for D. H. Lehmer's conjecture, J. Math. Soc. Japan, 62 (2010), 687–705. 査読有
- ③ M. Koike, Congruences between extremal modular forms and theta series of special types modulo powers of 2 and 3, Kyushu J. Math., 63 (2009), 123–132. 査読有

[学会発表] (計3件)

- ① 小池 正夫, 2進的な保型形式について、ミニ研究集会「代数的組合せ論」、九州大学、March 18, 2009
- ② E. Bannai, Toy models of D. H. Lehmer's conjecture, Discrete Geometry and Statistics of Configurations, Steklov Institute of Math., Moscow Russia, June 1, 2009.
- ③ M. Koike, Congruences between extremal modular forms and theta series of special types modulo powers of 2 and 3, East Asia Number Theory Conference, KAIST, Daejeon Korea, Jan. 22, 2008.

6. 研究組織

(1)研究代表者

小池 正夫 (KOIKE MASAO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 20022733

(2)研究分担者

坂内 英一(BANNAI EIICHI)

九州大学・大学院数理学研究院・学術研究者

研究者番号:10011652