様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 ２１ 年　４　月　３０　日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００７～２００８
課題番号：１９５４００４１
研究課題名（和文）　３次元アフィン空間の非射影的コンパクト化

研究課題名（英文）　Non-projective compactifications of three dimensional affine space

研究代表者
古島　幹雄（FURUSHIMA MIKIO）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
００１６５４８２

研究成果の概要：
第２ベッチ数１をもつ３次元複素アフィン空間の非射影的コンパクト化（X,Y）については，境界因子 Y が nef の場合は，指数２以下の高々ゴレンスタイン端末特異点を持つ３次元ファノ多様体によるコンパクト化の分類に帰着されることが分かる．
特に，指数２の場合は（X,Y）の構造は解明されているが，指数１の場合は，具体的な例（モデル）は存在する者の，最終的な構造の決定までは至ることが出来なかった．
しかし，境界因子を詳細に解析する事により，境界の位相的・代数的構造と全体空間の位相的・代数的構造との関連について結果を得た．
Y が non-nef の場合は，古島によって構成された無限個の例について，解析的な不変量を定義し，具体的にその不変量を求めた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,500,000	450,000	1,950,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：アフィン空間，非射影的コンパクト化

１．研究開始当初の背景

第２ベッチ数１をもつｎ次元複素アフィン空間C^nのコンパクト化の決定問題はドイツの数学者ヒルツェブルフ氏によって１９５４年に提起され，２次元までは１９６０年に連メルト．ファンデフェン等により完全に解決された．

３次元以上の場合は問題は極めて困難さを増し，結果的には，現在に至まで完全には解決されていないのが現状である．

古島は，１９８６年以降，特に，３次元複素アフィン空間Ｃ^{3}の射影的コンパクト化 (X,Y) の分類について長年研究を行ってきた．そして，２０００年頃までにはその構造も含め完全に決定した．実際，同型を除き，６種類ある事を示した．

一方，Ｃ^{3}の非射影的なコンパクト化については，もし存在すればモイシェゾン多様体であることが，ペターネル・シュナイダー氏等により知られていた．しかし，具体的にそのようなコンパクト化が存在するかどうかは当時は知られていなかった．

存在性については，古島により，３次元複素アフィン空間の非射影的なモイシェゾンコンパクト化の例を無限個構成することによって示された．

これらの存在結果は，Ｃ^{3}の非射影的なコンパクト化の研究が意味がある事を示すのみならず，ある意味で，研究の新たなスタートと位置づけることも出来る．

さて，Ｃ^{3}の非射影的コンパクト化 (X,Y) の境界因子 Y の構造は予想以上に複雑である．実際，Y は非正規モイシェゾン曲面で，その正規化モデルは射影代数的で，その最小特異点除去は線織面あることが分かる．

しかし， Y の位相的性質の解明は困難であり，第３ベッチ数が消える条件を仮定することによって，困難さはある程度解消される，こうして， X の第３ベッチ数が消えるという条件を新たに加えて構造を決めることとした．

その際，次の２つの場合：(i) 境界因子 Y が nef の時． (ii) 境界因子 Y が non-nef の時．に分けて考察する．

まず，(i) の場合，即ち，境界因子 Y が nef のとき，X は指数が２以下のゴレンスタイン端末特異点を持つ３次元ファノ多様体の小特異点解消によって得られることが知られている．

指数が２の場合は，このようなファノ多様体についてはその構造は完全に決定され分類も完成している．

次に，指数が１の場合は，そのようなコンパクト化は実際存在することは知られているが，その構造につては完全には決定されていないようである．

次に，(ii)の場合，即ち，境界因子 Y が non-nef のときは，このような場合は実際存在する事は知られているが，その構造については殆ど知られていない状態である．

また，先行研究や関連する研究も殆ど無く，研究の方向や方針も具体的に立て難い状況であった．

そこで，研究の第一歩として，擬次数と呼ばれるコンパクト化に付随する不変量を定義し，古島によって構成された無限個の例に対して，具体的に計算し，これらの結果から一般的な性質を探る作業を行う必要がある．以上のような背景があった．

２．研究の目的

第２ベッチ数１のＣ^{3}の非射影的コンパクト化 (X,Y) に対して，次の①，②を研究することを目的とする．

(1) 境界因子 Y が nef で指数が１の場合の (X,Y)の構造を決定する問題が残っている．これまでの研究成果から，(X,Y) は指数１，種数１０のゴレンスタイン端末特異点を有するファノ多様体によるＣ^{3}のコンパクト化の小特異点解消によって得られるという予想が正しそうなので，この予想の解決に向けて研究を行う．その際，境界因子 Y およびその正規化 の幾何的・代数的構造を詳しく調べ，それと非射影的コンパクト化 X の全体構造との関係を調べる．

(2) Y が non-nef かつ指数が２の場合，無限個の例が存在する．それらの例について擬次数と呼ばれる不変量を計算し，それらの計算結果を参考に，一般の場合の境界因子 Y の構造およびXの構造（特に有理性）について研究を行うこと．その際，境界因子 Y が定める線形系|Y|の不定点およびその解消について詳細に解析する．

３．研究の方法

（平成１９年度）

(1) 毎年，神奈川県葉山の湘南国際村で開催される国際研究集会（葉山国際シンポジューム）に参加し，関連分野の来日数学者との研究討議を行った．

(2) 代数幾何学の専門家である九州大学の佐藤栄一教授，長年にわたって研究の理解者である，京都大学の中山昇准教授との研究討議を行った．

(3) 日本数学会や富山大学で開催された多変数関数論冬セミナーに出席し，研究成果の講演も行った，出席者からの助言やコメントを貰い，研究を推進させた．

(4) ドイツのマックスプランクおよびボン大

学主催の数学国際研究集会に参加し，客員として滞在していたロシア人数学者と研究討議を行った.

（平成２０年度）

(1) 平成２０年４月から９月末までの約半年間ドイツのマックスプランク数学研究所から客員教授として招待され，研究所に客員として滞在していた，ロシア人，ドイツ人，イタリア人若手およびベテラン数学者と密接なる研究討議を行った.

(2) インターネットを通して関連する研究論文をダウンロードし，大学院生のセミナーで購読するなど，問題解決に必要と思われる知識やテクニックを収集し我々の問題に適用し，細かい構造を調べた.

(3) 広島大学の島唯史准教授と境界因子Ｙ の特異点に関してセミナーを定期的に行った.

(4) 平成２０年度多変数関数論冬セミナーを熊本大学で開催し，関連する研究を行っている研究者に講演を依頼し，開催期間中，これら研究者からの研究情報を提供を受けた.

４．研究成果

（１）X の第３ベッチ数が消えるという条件の下で研究を行った.

今，境界因子 Y が nef の場合は，X は指数１のゴレンスタイン端末特異点をもつファノ多様体Ｖの小特異点解消によって得られることが分かる.

$\mathbf{C}^3$のコンパクト化としてのＶに於ける$\mathbf{C}^3$の境界因子を A とおくと，A は非正規有理曲面で，A の特異点集合は非特異有理曲線の樹木である事がわかる.

A の最小特異点除去Ｍは非特異有理曲面で，Ｍ上の ajoint linear system の固定点自由化定理を応用することにより，A の特異点集合について詳細情報を得る事ができる，このことを用いて，$\mathbf{C}^3$の特異ファノ・コンパクト化 (V,A) の可能性をリストアップした. 但し，各場合が実際に存在するかは不明である.

更に，京都大の並河氏によるゴレンスタイン端末特異点をもつファノ多様体の平滑化（smoothing）の存在定理を応用し，X の位相的・幾何的不変量とＶの特異点のミルナー数や特異点の数，さらに，V を平滑化して得られる非特異ファノ多様体の位相的・幾何学的不変量との間の関係式を見出し，更に，テクニカルな仮定を置いて，V は種数１０のゴレンスタイン端末特異点をもつファノ多様体である事を示した.

これら一連の研究では，幾つか強い仮定を置いたので，今後は，これらの仮定を再吟味しつつ，新たなアイデアやテクニックを手に入れる必要があると考える.

（２）境界因子 Y が non-nef の時は，指数が２の場合を中心に研究を行った，まず，この場合の知られている例の全てに対し擬次数（不変量）を計算し，擬似数は４であることを示した．一方，コラー氏の結果を応用して，一般に，X の擬次数は３または４である事を示した.

特に，Y が定める線形系|Y|によって定義される有理型写像は双有理的であり，その不定点解消の構造を詳細に解析することにより，X の擬次数は４である事がわかった.

結果的に，X は４次元射影空内の非特異２次超曲面に双有理型同型であることが分かった．この結果は新しい結果である.

一方，指数が１の場合は，現在の所，有効なテクニックがないが, 境界因子Ｙの特異点の構造や，Ｙの最小特異点除去の大域的な構造については部分的な結果も得られており，今後，更に研究内容を深めていきたい.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① <u>古島幹雄</u>、大嶋康裕，島唯史，Analytic compactifications of $\mathbf{C}^2$/D、Abh.Math. Uni. Hamburg，Vol.77，155--168，2007，査読有り.

②<u>古島幹雄</u>
Non-projective compactifications of C3 (IV)，Kyushu J. Math. Vol.66，259—273，2007.，査読有り.

〔学会発表〕（計　２　件）

①<u>古島幹雄</u>，Non-projective compactification of $\mathbf{C}^3$, Koloquim in Hamburg,2008 5,6, Hamburg University

②<u>古島幹雄</u>，Twards the classification of non-projective compactifications of $\mathbf{C}^3$, Oberseminar in Max-Planck-Institute for Mathematik, Bonn (Germany).2008.04.30

６．研究組織

(1)研究代表者

古島　幹雄（FURUSHIMA MIKIO）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：００１６５４８２

(2)研究分担者

(3)連携研究者