

研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19540043  
 研究課題名（和文） 分岐被覆とザリスキ・ペア

研究課題名（英文） Branched covers and Zariski pairs

## 研究代表者

徳永 浩雄 (TOKUNAGA HIROO)  
 首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
 研究者番号：30211395

研究成果の概要（和文）：Galois 分岐被覆の存在・構成に関する研究およびザリスキ・ペアに関する研究を行った。まず、E. Artal Barolo, J.-I. Cogolludo とともに 2007 年以前までのザリスキ・ペアに関する主要な研究成果・手法について、サーベイを著した（このサーベイには新たな知見も含まれている）後、①versal Galois 被覆と 2 次元クレモナ群に関する研究、② non-Galois 3 次被覆に関する研究（Zariski の例の一般化、引き戻し構成法）、③ 2 次被覆の分解曲線とそのザリスキ・ペアへの応用に関する研究を行った。

研究成果の概要（英文）：I have investigated branched Galois covers and Zariski pairs. With E. Artal Bartolo and J.-I. Cogolludo, I first wrote a survey article on Zariski pairs. In the survey, main tools and results about Zariski pair up until around 2007 are explained. Also some new results are contained in the survey. Afterward, I have studied 1. versal Galois covers and the two dimensional Cremona group, 2. non-Galois triple covers (a generalization of Zariski's example and pull-back constructions), and 3. splitting curves on double covers and their application to Zariski pairs.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Galois 分岐被覆, ザリスキ・ペア

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 被約な平面代数曲線のペア  $(B_1, B_2)$  が以下の条件をみたすとき、このペアをザリスキ・ペアと呼ぶ：

- ①  $B_1, B_2$  の管状近傍  $T(B_1), T(B_2)$  と同相

写像  $h: T(B_1) \rightarrow T(B_2)$  で  $h(B_1) = (B_2)$  を満たすものが存在する。この条件は  $B_1, B_2$  の組み合わせ論的なデータから判定可能。

② 射影平面  $P^2$  から  $P^2$  への同相写像で  $B_1$  を  $B_2$  に写すものは存在しない。

ザリスキ・ペアの研究は 1929 年の Zariski の論文「On the problem of existence of algebraic functions of two variable possessing given branch curve, Amer. J. Math. 51 305-328」にある 6 つのカスプをもつ 6 次曲線のザリスキ・ペアの例に始まる。ザリスキの例以降, 90 年代半ばに至るまであまり研究されていなかった。その理由は数学者の興味が上記論文から生じたザリスキ予想と呼ばれるものにあったからと考えられる。

ザリスキ・ペアの研究は 90 年代半ばから急速に進展した。研究の手法は, 基本群, braid monodromy, Alexander 不変量等の位相不変量を用いたもの (E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo, 岡等による), Galois 分岐被覆の理論を応用したもの (主として, 研究代表者による研究) がある。本研究課題を申請した 2006 年当時は, 上記の手法による様々の成果が得られており, これらの手法・成果をまとめ, 概観した後更なる新展開を目指す段階にあった。

(2)  $X, Y$  は正規射影多様体とする。  $X$  から  $Y$  への有限な全射  $f: X \rightarrow Y$  が存在するとき,  $X$  を  $Y$  の被覆とよぶ。  $X$  が  $Y$  の被覆であるとき,  $X$  の函数体は  $Y$  の函数体の有限次代数拡大となる。この拡大が Galois 拡大となるとき,  $X$  を  $Y$  の Galois 被覆と呼ぶ。 Galois 被覆は代数多様体の例を構成する際に有効な手段の一つである。とりわけ Galois 群が可換群である場合は, 多くの研究者により利用されてきた。一方, Galois 群が非可換である場合は現在も組織立った研究もあまりなされていない状況である。

研究代表者は Galois 群が比較的扱いやすい非可換群である場合について, その構成法を研究してきた。(1) のザリスキ・ペアの研究はその応用の一つである。研究代表者がのこれまでの理論をさらに発展させ, 従来とは違ったアプローチを模索する状況であった。

## 2. 研究の目的

(1) ザリスキ・ペアの研究では, 90 年代半ば以降に得られた様々な成果についてまず概観することが本研究課題の第 1 の目的である。その後, 分岐被覆の構成に関する理論をザリスキ・ペアの研究に応用することを目的とする。その一つとして, non-Galois 3 次被覆の理論を応用して, 「6 個のカスプを持つ 6 次曲線のザリスキ・ペア」について, Zariski のオリジナルな証明を検討し, 一般化することなどが具体的な目標であった。

(2) Galois 分岐被覆については, 二面体被覆 (Galois 群が二面体群である Galois 被覆) の構成に関する研究をさらに深めることを

目的とした。具体的には, 以下の通りである:

① 二面体群を一つ固定するのではなく, 様々な位数の二面体群を一度に扱う「二面体被覆の塔」を導入し, 存在条件・その応用を考察すること。

②  $S$  は非特異代数曲面  $\Sigma$  上の二次被覆とする。  $\Sigma$  上の曲線に対し,  $S$  で分解する「分解曲線」と呼ばれる概念を導入し, その分解法則について研究を行う。この研究は二次体の整数論の代数曲面版とも呼べる研究である。二面体被覆の構成においては, 分解曲線は重要な役割を果たしており, 分解曲線の研究成果は, そのまま二面体被覆の研究への応用が見込まれる。

③ versal Galois 被覆 (Galois 被覆におけるある種の普遍的対象物) の研究を行い, 引き戻しを用いた分岐被覆の構成を考察する。

## 3. 研究の方法

(1) ザリスキ・ペアの研究について。

① 様々な成果・手法に概観については, E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo らと共同で survey paper の執筆を行った。

② 「Zariski の 6 個のカスプを持つ 6 次曲線のザリスキ・ペア」の一般化については, まず, Zariski のオリジナルな証明を洗い直し, 研究代表者が考案した non-Galois 3 次被覆に関する理論を用いた証明をあたえた。さらに, S.-L. Tang の考案した 3 次被覆の理論を用いて, Zariski の主張を単純特異点のみをもつ被約な 6 次曲線に一般化した。なお, この研究は連携研究者の石田と共同で行った。

③ ザリスキ・ペアの研究では,  $K3$  曲面の幾何を用いるもの, 基本群や Alexander 不変量を利用するものもある。これらのアプローチでは連携研究者の岡, 島田が精力的な研究を行った。

(2) Galois 分岐被覆について。

① 二面体被覆の塔については, E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo とともに共同で研究を行った。

② 分解曲線の研究については, 整数論における「平方剰余の相互法則」を定式化することから始めた。その際, 一般の代数曲面に対してではなく, 曲面に曲線束の構造がある場合について, 曲線束のヤコビアン of Mordell-Weil 群を利用した定式化の考察から始めた。

③ versal Galois 被覆及び引き戻し構成法について。

4 次対称群および 5 次交代群については 2 通りの 2 次元 versal Galois 被覆の例が知られており, これらが「同変双有理同値であるか否か」が問題であった。この問題に対し, Iskovskikh の手法を利用して, 大学院生

坂内真三と取り組んだ。

また、平面 5 次曲線に沿って分岐する non-Galois 3 次被覆を具体的に与える 3 次方程式について、大学院生の保村匡亮とともに取り組んだ。射影平面から射影平面への有理写像の構造を考察することがポイントとなった。

#### 4. 研究成果

以下で述べる成果はそれぞれ研究集会での講演、雑誌論文での発表を通して公にされている。

##### (1) ザリスキ・ペアの研究

①研究代表者の徳永は、E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo らと共にザリスキ・ペア研究に関する近年の結果・手法をサーベイを著した。なお、このサーベイは、これまでの結果の単なるまとめのみではなく、土橋・難波のザリスキ・ペアに関する新たな知見に関する報告も含んでいる。さらに、分解曲線の研究の応用としてザリスキ・ペアの例も与えた。

②連携研究者の岡は、(イ) 平面曲線が特殊な退化する場合、その Alexander 多項式がどの様に変化するかという研究を行った。さらに(ロ) ある特別な平面6次曲線の補空間の基本群を計算した。

連携研究者の島田は、K3 曲面と格子の理論を応用して 6 次曲線のザリスキ・ペアに関する精密な研究を行った。さらに、正規曲面のザリスキ・ペアの例も与えている。

③研究代表者の徳永と連携研究者の石田は Zariski の例の一般化に成功した。

##### (2) Galois 分岐被覆について

① 二面体被覆の塔を応用した成果は 2 つである。射影平面上の二面体被覆の塔にあるものについては、その分岐因子の定義方程式が特別な形をしていることを証明した。また、土橋・難波のザリスキ・ペアに関して、二面体被覆の塔を用いた観点から証明を与えた。これらは、ともに E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo との共同研究である。

② 分解曲線の研究では、Hirzebruch 曲面上のある種の既約曲線の間「相互法則」の類似が成立することを証明した。さらに、「相互法則」を利用して、非特異平面 2 次曲線に対し「平方剰余」となる既約な平面 4 次曲線の研究を行った。

③ 前述の  $S_4$  と  $A_5$  に関する 2 種類の 2 次元 versal Galois 被覆は互いに「同変双有理同値ではないこと」を証明した。これは、これら 2 つの有限群が 2 次元クレモナ群への、互いに共役でない埋め込みを持つ事を意味している。

つづいて、5 次曲線で分岐する射影平面の

non-Galois 3 次被覆の「引き戻し構成」については引き戻しの有理写像を具体的に与えることに成功した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件、以下主要なもの)

##### 1. Tadasuke Yasumura and Hiro-o Tokunaga,

Non-Galois triple covering of  $P^2$  branched along quintic curves and their cubic equations, *Nihonkai J. of Math.* **20** (2009), 109-126. 査読有

2. Hiro-taka Ishida and Hiro-o Tokunaga, Triple covers of algebraic surfaces and a generalization of Zariski's example, *Advanced Studies in Pure Math.* **56** (2009), 169-185. 査読有

3. Alexander Degtyarev and Mutsuo Oka, A plane sextic with finite fundamental group, *Advanced Studies in Pure Math.* **56** (2009), 93-108. 査読有

4. E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo and Hiro-o Tokunaga, A survey on Zariski pairs, *Advanced Studies in Pure Math.* **50** (2008), 1-100. 査読有

5. E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo and Hiro-o Tokunaga, Pencils and infinite dihedral covers of  $P^2$ , *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 21-29. 査読有

6. Ichiro Shimada, On arithmetic Zariski pairs in degree 6, *Adv. Geom.* **8** (2008), 205-225. 査読有

7. Shinzo Bannai and Hiro-o Tokunaga, A note on embeddings of  $S_4$  and  $A_5$  into the two-dimensional Cremona group and versal Galois covers, *Publ. Inst. Math. Sci.* **43** (2007), 1111-1123. 査読有

8. Mutsuo Oka, Tangential Alexander Polynomials and non-reduced degeneration, *Proceedings of Singularities and topology*, World Scientific (2007), 669-704. 査読有

[学会発表] (計 28 件、以下は主要なもの)

1. 徳永浩雄, On quadratic residue curves, *Topology of singularities and related topics*, 2010 年 3 月 23 日, Hanoi Institute of

Mathematics.

2. 徳永浩雄, On quadratic residue divisors and their application, 5<sup>th</sup> Franco-Japanese symposium on Singularities, 2009年8月27日, Universite de Strasbourg.

3. 島田伊知朗, On Zariski pairs of normal surfaces in  $P^3$ , 5<sup>th</sup> Franco-Japanese symposium on Singularities, 2009年8月27日, Universite de Strasbourg.

4. 徳永浩雄, Splitting curves, dihedral covers and the Mordell-Weil groups, Singularities in Aarhus, 2009年8月20日, Aarhus University.

5. 徳永浩雄, Splitting curves, dihedral covers and the Mordell-Weil groups, Hodge theory and algebraic geometry, 2009年6月29日, 京都大学数理解析研究所.

6. 徳永浩雄, Splitting curve と二面体被覆, Workshop on Galois points and related topics, 2009年6月6日, 神奈川大学富士見高原研修所

7. 徳永浩雄, Splitting curves in double covers, Branched coverings, Degenerations, and Related Topics, 2009年3月11日, 広島大学.

8. 島田伊知朗, On equisingular families of plane curves of degree 6, Arithmetic and Algebraic Geometry Related to Moduli Spaces, 2009年1月19日

9. 保村匡亮 (発表者), 徳永浩雄, Cubic equations and non-Galois triple covering of  $P^2$  branched along quintic curves, ガロア理論とその周辺 徳島2008, 2008年9月9日, 徳島大学

10. 保村匡亮, 徳永浩雄 (両者で発表), Construction of non-Galois triple covers via “pull-back,” Workshop on Galois point and related topics, 2008年6月8日, 神奈川大学富士見高原研修所

11. 徳永浩雄, Local trigonal fibration について, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2007年9月11日, 九州大学.

12. 石田弘隆, 徳永浩雄 (発表者), Triple covers of algebraic surfaces and a generalization of Zariski’s example, 4<sup>th</sup>

Franco-Japanese symposium on Singularities, 2007年8月30日, 富山市

13. 岡 睦雄, Geometry of pencils of curves via Taylor expansions, 4<sup>th</sup> Franco-Japanese symposium on Singularities, 2007年8月30日, 富山市.

14. 島田伊知朗, Non-homeomorphic conjugate complex varieties, 4<sup>th</sup> Franco-Japanese symposium on Singularities, 2007年8月30日, 富山市

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

徳永浩雄 (TOKUNAGA HIROO)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 30211395

##### (2) 研究分担者

岡睦雄 (OKA MUTSUO)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号: 40011697

(H20→H21: 連携研究者)

島田伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)

広島大学・大学院・理学研究科

研究者番号: 10235616

(H20→H21: 連携研究者)

石田弘隆 (ISHIDA HIROTAKA)

宇部工業高等専門学校・一般科・講師

研究者番号: 30435458

(H20→H21: 連携研究者)

##### (3) 連携研究者

なし