様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１４日現在

機関番号：２４４０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2010
課題番号：１９５４００４４
研究課題名（和文）有限群と多元環のモジュラー表現と整数表現

研究課題名（英文）Modular and integral representations of finite groups and algebras

研究代表者
河田　成人（KAWATA SHIGETO）
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：５０１９５１０３

研究成果の概要（和文）：有限群の整数表現において、係数環として十分大きな完備離散付値環を考えると、直既約なモジュラー表現加群の Heller 整数表現加群は直既約であることの証明を正しく与えることができた。また、無限表現型のブロックに属する自明なソースを持つ整数表現加群を含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分の形状は A 無限型であり、自明なソースを持つ加群は連結成分の端に位置することを示した。

研究成果の概要(英文):We gave a proof of the indecomposability for certain Heller lattices over integral group rings. Also, we investigated the Auslander-Reiten quiver of an integral group ring, and we showed that Auslander-Reiten components containing trivial source lattices belonging to a block of infinite representation type are of type A-infinity and trivial source lattices lie at the end of their components.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	700,000	210,000	910,000
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：表現論，有限群，群環，多元環，概分裂列，Auslander-Reiten 有向グラフ

１．研究開始当初の背景

アルティン環や完備離散付置環上の多元環の表現論において、Auslander-Reiten 有向グラフ（以下ＡＲグラフと書く）と呼ばれるグラフを主な研究対象とする Auslander-Reiten の理論が駆使されている。ＡＲグラフとは直既約加群の同型類を点に、既約写像を矢とみなして得られるグラフのことである。無限表現型の群環のＡＲグラフの連結成分の形状は多くの場合、ユークリッド型かまたは A_∞型, D_∞型, A_∞^∞型のどれかであることが Webb によって示された。さらに Erdmann は有限群のモジュラー表現の場合に、このグラフの形を決定した。すなわち，正標数の体上の群環がいわゆる wild 表現型であればＡＲグラフのすべての連結成分の形状は A_∞型であることを示した。その一方で、有限群の整数表現においては、ＡＲグラフの形状で判明しているものは少なく、知られている例のほとんどが A_∞型である。例えば、十分大きな完備離散付値環上の整群環が無限表現型であれば、射影的な表現加群を含む連結成分の形状はA_∞型である。

２．研究の目的

有限群の表現論を研究するにあたって、正標数の体上の表現（以下でモジュラー表現と呼ぶ）と標数０の体上の通常表現を併行して考察することは大変有効であり、さらにこれらのモジュラー表現と通常表現を有機的に結び付けるものとして完備離散付値環上の表現（以下では整数表現と呼ぶ）が重要な位置を占める。有限群のモジュラー表現と整数表現を Auslander-Reiten の理論を通して統一的に研究することを目標とする。

モジュラー表現の場合には、Erdmann によって wild 表現型の群環のブロックのＡＲグラフの連結成分は A_∞型であると知られている。この重要な結果を踏まえて、有限群の整数表現におけるＡＲグラフの形状の決定を目指すことを第１の目的とする。現時点では、整数表現におけるＡＲグラフの形状については、有限表現型やいわゆる tame 表現型の場合には調べられているが、一般の wild 表現型の場合にはどのようなものなのか、少数の例を除いてあまり知られていない。数少ない先行研究の一例として、［Kawata: On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group, Algebras and Representation Theory 9(2006), 513-524］では、無限表現型の整数表現では Heller 格子を含むＡＲグラフの連結成分は A_∞型であること、さらにHeller格子はA_∞型のＡＲグラフの端点に位置していることを突きとめた。ここで Heller 格子とは、モジュラー表現における表現加群を完備離散付置環上の加群と見なしてその射影被覆を考えたときの核となっているような整数表現加群のことである。例えば，射影的整数表現加群の根基は単純なモジュラー表現加群の Heller 格子である。これらの結果をもっと発展させるために、モジュラー表現におけるＡＲグラフと整数表現におけるＡＲグラフとの関連に注目したい。なかでもモジュラー表現における置換表現は、整数表現における置換表現に持ち上げ可能であるので、この置換表現を手はじめとしてＡＲグラフの形状についての考察を進展させたい。更に整数表現での既約加群や射影加群のＡＲグラフにおける位置についての考察を通じて有限群の表現論における応用を見つけたい。

さて、群環は多元環のなかでも重視すべきクラスであり、群環の表現加群の研究は一般のアルティン環や完備離散付置環上の多元環の表現論の研究とも互いに大きく影響を及ぼしあっている。例えば，［S. Kawata: On Heller lattices over ramified extended orders, J. Pure Appl. Algebra 202 (2005), 55-71］において Heller 格子を研究したが、得られた主結果の一つとして、ある条件下では直既約なモジュラー表現加群の Heller 格子は直既約であるということを見いだした。さらに、モジュラー表現加群の間の準同型写像は Heller 格子の間の準同型写像に持ち上げ可能であり、ひいてはモジュラー表現加群の短完全列が整数表現における格子の短完全列に持ち上げ可能であることも見出された。そしてこれらのことは群環だけに限らず、もっと一般の完備離散付置環上の多元環（いわゆる整環）に対しても，係数環の極大イデアルで簡約化した体上の多元環が概 Frobenius 環であれば上記のような事実が成り立つことが確かめられた。このように、有限群の表現論の研究で得られた成果を広く反映させて、アルティン環や完備離散付置環上の多元環の研究の発展にも寄与することも目的とする。

３．研究の方法

有限群の整数表現におけるＡＲグラフの形状の決定を大きな目標として研究を進める。モジュラー表現における Erdmann の定理と類似の主張が整数表現でも成立するのではないかと予想している。そのためにまず位数が素数巾の有限群に着目してその整群環のＡＲグラフの形について考察する。素数巾位数の有限群の場合には、［Inoue and Kawata: On Auslander-Reiten components and trivial modules for integral group rings of *p*-groups, Journal of Algebra 203(1988), 374-384］で自明な表現加群を含むＡＲグラフの連結成分は A_∞型であることを確かめ、［Kawata: On Auslander-Reiten components and projective lattices of *p*-groups, Osaka Journal of Mathematics 38 (2001), 487-499］では射影加群を含むＡＲグラフの連結成分は A_∞型であることを確かめた。次の段階として、自明な加群や射影加群の一般化とも見なすことができる置換加群に注目し、これら置換加群を含むＡＲグラフの連結成分についての考察を始める。また、一般位数の有限群の整数表現の場合には、既約加群や射影加群、置換加群の直和因子などが特に重要と思われるので、そのような表現加群を含むＡＲグラフの連結成分について注視する。整数表現のときにはある種の既約加群は A_∞型のＡＲグラフの端点に位置することは既に証明したので、これら既約加群を端緒として考察を始める。他方では、具体例として対称群やLie型の有限群には豊富な結果が蓄積されているので、これらの群の整数表現におけるＡＲグラフの計算を試みる。さらには既約加群を含むＡＲグラフの連結成分を何らかの部分群と関連づけて制限・誘導などの操作を施したとき、どのようなＡＲグラフの連結成分が現れるのか、観察を行いたい。さらにできれば、ＡＲグラフの端点に位置するような表現加群はどのような性質

を持つものなのかを模索する。そしてこのような試行と模索を繰り返しながら、整数表現のＡＲグラフの形状とその性質について一般論に迫りたい。

なお、有限群のモジュラー表現と整数表現とは密接に結びついている。例えば、整数表現において直既約な射影加群を簡約化すると、モジュラー表現における直既約射影加群が得られる。ＡＲグラフについてもモジュラー表現と整数表現との間の関係を追求していきたい。例えば、整数表現における射影加群を含むＡＲグラフの連結成分の一部分を簡約化すると，モジュラー表現における射影加群とＡＲグラフの一部分が得られることが見い出しされている ［S. Kawata： On standard Auslander-Reiten sequences for finite groups, Arch. Math. 75 (2000), 92-97]。この事実を詳しく検証することで，モジュラー表現におけるＡＲグラフについて知られている結果を、整数表現のＡＲグラフに反映させることができるのではないかと期待している。そして整数表現における個々の表現加群を別個に調べるだけではなく、ＡＲグラフの連結成分に属する表現加群を全体として捉えて、その包括的な性質を追求したい。なお。完備離散付置環上の整群環は整環のなかでも興味深く具体的な研究対象であり、整群環において得られた結果は整環の研究状況のなかでも注目され刺激を与えている。それゆえ整群環に関して得られた結果と連動させながら一般の整環についての理解も深めていきたい。

４．研究成果

有限群のモジュラー表現と整数表現を Auslander-Reiten の理論を通して統一的に考察することを念頭において研究を進めた。そして射影加群のＡＲグラフ内における位置を考察していく途上で、Heller 格子と呼ばれる整数表現の重要性の一端を見出した。この Heller 格子の概分裂列を研究することで、Heller 格子の一般的な特徴付けを行うことができた。さらに Heller 格子を含むＡＲグラフの連結成分の形状を決定した結果として、一般の整群環においては、少ない例外を除いて、いわゆるユークリッド型の形状のＡＲグラフは現れないことが分かった。

ところで、モジュラー表現加群の Heller 格子を考えるとき、まず見極めたいことは、直既約かどうかということである。一般にはモジュラー表現加群が直既約であったとしても、その Heller 格子は直既約とは限らない。しかし群環の係数環としている完備離散付置環が十分に大きいときには、直既約なモジュラー表現加群の Heller 格子が直既約であることが成り立つ。この事実は論文 [S.Kawata： On Heller lattices over ramified extended orders, J. Pure Appl. Algebra 202(2005), 55-71]で発表していたが、実はその証明に不備な箇所が見つかった。そこで証明を訂正するために Heller 格子の性質を更に深く研究した。特に，Heller 格子の自己準同型環とモジュラー表現加群の自己準同型環との関係を分析し、これらの自己準同型環が局所環であることを示すことによって、Heller 格子の直既約性を証明することができた。

次いで、自明なソースを持つ加群がどのような形状のＡＲグラフの連結成分に存在しているのか、さらにそのグラフ内のどのような場所に位置しているのか、ということを考察した。ここで自明なソースを持つ加群とは、置換加群の直和因子として現れるような直既約加群のことであり、有限群の表現論のなかでも重要な意味を持つ加群の一つである。モジュラー表現において体が代数閉体で wild 表現型と呼ばれるブロックの場合に，群の位数が素数巾の時には Erdmann によって，また一般位数の時には Uno により，自明なソースを持つ加群を含むようなＡＲグラフの連結成分の形状は A_∞型であり、さらに自明なソースを持つ加群はそのグラフ内の端点に位置することが知られていた。では，整数表現ではどのようなことが成り立つかが問題となったが、完備離散付値環の分岐指数が 3 以上の時には、いくつかの有限群の例外を除いて、モジュラー表現の場合と同様の事実が成り立つことを示すことができた。なお、有限群の位数が素数巾の時には、完備離散付値環の分岐指数に関する条件が不必要であることも分かった。

更に、トレース写像が分裂する加群がどのような形状のＡＲグラフの連結成分に存在しているのか、またそのグラフ内のどのような場所に位置しているのか、ということを考察した。なお、次元が体の標数と互いに素であるような表現加群はトレース写像が分裂することが知られている。ところで，完備離散付値環が十分に大きいときには、 Webb の定理により、一般にＡＲグラフの形状は A_∞型，D_∞型，A_∞^∞型のどれかであることが知られている。まず、トレース写像が分裂する整数表現加群を含むＡＲ連結成分の形状は D_∞型ではないことを証明した。次にトレース写像が分裂する表現加群で極大イデアルで簡約化して得られるモジュラー表現加群が直既約であるものに注目した。これらの表現加群は A_∞型の連結成分の端点に位置することが確かめられた．また剰余体の標数が 2 であるような完備離散付値環上の整数表現においては、トレース写像が分裂する加群を含むようなＡＲ連結成分の形状は、少数の例外を除いてA_∞型であることも確かめられた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）
① Shigeto Kawata, On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings, Journal of Algebra 322(2009), 1395-1405, 査読有
② Masaharu Kaneda, The structure of Humphreys-Verma modules for projective spaces, Journal of Algebra 322 (2009), 237-244, 査読有
③ Kaneda Masaharu, Kapranov's tilting sheaf on the Grassmannian in positive characteristic, Algebras and Representation Theory 11 (2008), 347-354, 査読有
④ Asashiba Hideto, Domestic canonical algebras and simple Lie algebras, Mathematische Zeitschrift 259 (2008), 713-754, 査読有
⑤ Shigeto Kawata, Erratum to "On Heller lattices over ramified extended orders", Journal of Pure and Applied Algebra 212(2008), 1849-1851, 査読有
⑥ Kaneda Masaharu and Ye Jiachen, Equivariant localization of D-modules on the flag variety of the symplectic group of degree 4, Journal of Algebra 309 (2007), 236-281, 査読有
⑦ 河田成人, 群環の Heller 格子について, 数理解析研究所講究録, 1564(2007), 70-75, 査読無

〔学会発表〕（計８件）
① 河田成人,群環における Auslander-Reiten 成分とトレース写像が分裂する加群について, 2010 年度日本数学会秋季総合分科会, 2010 年 9 月 22 日, 名古屋大学
② 兼田正治, Some observations on the structure of $F_* O_{G/P}$, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups（第 10 回名古屋国際数学コンファレンス）, 2010 年 8 月 6 日, 名古屋大学
③ 浅芝秀人, The 2-categories of G-categories and of G-graded categories are 2-equivalent for any group G, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学
④ 河田成人,群環の自明なソースを持つ加群と Auslander-Reiten quivers, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学
⑤ 河田成人, Auslander-Reiten components and trivial source modules for integral group rings, 表現論セミナー, 2009 年 2 月 21 日, 信州大学
⑥ Shigeto Kawata, On Auslander-Reiten components of type A-infinity for integral group rings, Algebra Seminar, 2008 年 12 月 17 日, 大阪府立大学
⑦ Hideto Asashiba, Covering functors, orbit categories and derived equivalences, XII International Conference on Representation Theory and Algebras（第 12 回多元環の表現論国際会議）, 2007 年 8 月 23 日, Nicolaus Copernicus University（ニコラウス・コペルニクス大学、トルン、ポーランド）
⑧ Shigeto Kawata, Heller lattices and Auslander-Reiten quivers for integral group rings, XII International Conference on Representation Theory and Algebras（第 12 回多元環の表現論国際会議）, 2007 年 8 月 23 日, Nicolaus Copernicus University（ニコラウス・コペルニクス大学、トルン、ポーランド）

６．研究組織
(1)研究代表者
河田　成人（KAWATA SHIGETO）
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50195103

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
兼田　正治（KANEDA MASAHARU）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60204575

浅芝　秀人（ASASHIBA HIDETO）
静岡大学・理学部・教授
研究者番号：70175165

加戸　次郎（KADO JIRO）
大阪市立大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：10117939