

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2010

課題番号：19540048

研究課題名（和文）代数的符号理論の研究とその頂点作用素代数への応用

研究課題名（英文）Research on algebraic coding theory and its applications for vertex operator algebras

研究代表者

別宮 耕一（BETSUMIYA KOICHI）

弘前大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：60364684

研究代表者の専門分野：代数的組合せ論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群論、符号理論

1. 研究計画の概要

本研究は、符号理論の研究対象である立方重偶符号の研究成果を応用して、ある種の頂点作用素代数の分類を与えることを目的とする。その分類結果を通して、ムーンシャイン頂点作用素代数の位置付けを明らかにできると期待している。

この研究目的を実現するための研究計画は次の通りである。

(1) 初年度の研究計画

まず、長さ48の立方重偶な極大符号の分類を完成させるために、次の具体的な問題の研究に着手する。

- ① 数え上げ公式の導出、
- ② 同値な符号における不変量の性質の解明、
- ③ 非同値類を特徴付ける不変量の組み合わせの解明、
- ④ 符号間の結合構造の解明、
- ⑤ 極大次元と既約成分の個数との関連性についての定式化。

これらの課題についての成果を基に長さ48の場合について、極大な立方重偶符号の分類に着手する。

(2) 2年目以降の研究計画

- ① 立方重偶符号に関する知見を積み重ねることで、十分実用的な分類アルゴリズムを考案する。
- ② そのアルゴリズムを用いて長さ48の立方重偶符号の分類を完成させる。
- ③ その成果をもとに、正則な枠付き頂点作用素代数の分類およびムーンシャイン頂点作用素代数の位置付けについて分析を行

う。

- ④ 符号理論の面では、立方重偶符号とすでに研究が進められている符号との関連について研究を進める。ここでは、二元体上の重偶な自己双対符号、位数4の整数剰余環上の第二型符号、拡大二元体上の重偶な自己双対符号などを想定している。

ただし、予想できなかった困難に途中で遭遇した場合は、研究目的が達成できるようにスキームを立て直し研究を進める。

2. 研究の進捗状況

(1) 初年度の計画に関わる進捗状況

計画通り、初年度の目標としていた項目については、研究環境を整え、研究に着手することができた。それぞれの項目についての現在の進捗状況は次の通りである。

- ① 数え上げ公式については、後述の通り、立方重偶符号の分布状況が当初予想していたよりも複雑であるため、公式導出の見通しは立っていない。
- ② 非同値類を特徴付ける不変量については、それに代わる性質の対象についての知見によって代用することができた。
- ③ 符号間のある種の結合構造が、符号から得られる頂点作用素代数の性質に密接な関連があるとの知見が得られた。現在さらに研究を進めている。
- ④ 研究の初期段階に行った数値実験の結果として、立方重偶符号の極大次元が、その既約成分の個数に支配されているとの仮説が得られたが、その後の研究の結果、後

述の通り、例外的な立方重偶符号の存在が明らかとなった。ただし、極大性と密接に関わる部分構造と、既約成分の個数との顕著な関係については、完全に定式化することができた。

(2) 2年目以降の計画に関わる進捗状況

- ①分類アルゴリズムの開発については、長さ48に関する限り完璧なものが得られた。
- ②開発したアルゴリズムを用いて、長さ48の立方重偶符号の分類に成功した。その結果は本研究の初期に定式化した仮説とは異なっており、結果的に次元の比較的小さな例外的な極大符号が存在するという事実を構成的に確認することとなった。この結果については現在論文発表のための作業を進めている。
- ③この例外的符号の出現により、正則な枠付き頂点作用素代数の理論に、これまで知られていなかった多くの知見をもたらした。その結果については現在論文発表のための作業を進めている。
- ④関連する整数剰余環上の重偶な自己直行符号については、数え上げ公式が得られ②として論文発表すると同時に、②の国際会議で報告を行った。

3. 現在までの達成度

- ①当初の計画以上に進展している。
(理由)

大きな目標としていた、長さ48の立方重偶符号の分類を完成させることができた。また、例外的な極大立方重偶符号の存在を確認したことは予想外の成果であった。

4. 今後の研究の推進方策

有限の対象を扱う分野では、演繹的な操作や、帰納的な試行錯誤の結果得られる事実と同様に、異なる世界の係わりの中で突発的に現れる豊かな構造によって分野の研究が大きく進展するといったことが頻繁に見受けられる。本研究においては、共形場理論、有限群論、保型形式論、情報理論などが係わり合う中で突発的に捉えられる構造の出現も期待している。今回、発見した例外的な極大立方重偶符号は、まさにその顕著な例と思われる。

しかし、例外的な符号の発見によって、同時に、符号の分布状況も複雑であることが判明し、計画していた数え上げ公式の導出は非常に困難な課題となった。また当初予想していたものよりも問題が拡大し、目標であったムーンシャイン頂点作用素代数の位置付けを見出すために、例外的な符号に関連する頂点

作用素代数の特定を進める必要が生じたこととなった。

そうした新たに明らかとなった課題に対して、一つ一つ知見を積み重ねることで、今後の研究を推進していく。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ①別宮耕一・原田昌晃・木村浩、Hadamard matrices of order 32 and extremal ternary self-dual codes、Designs, Codes and Cryptography、査読有、印刷中
- ②別宮耕一・Rowana Alma L. Betty・宗政昭弘、Mass formula for even codes over Z_8 、Cryptography and Coding, Springer LNCS、査読有、5921、2009、65-77
- ③別宮耕一、Minimum Lee weights of Type II code over F_2^r 、Discrete Mathematics、査読有、308、2008、3018-3022
- ④C.H. Lam・山内博、On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers、Communications in Mathematical Physics、査読有、277、2008、237-285

[学会発表] (計5件)

- ①山内博、散在型有限単純群と頂点作用素代数、日本数学会2010年度年会、3月27日、慶應義塾大学
- ②別宮耕一、Mass formula for even codes over Z_8 、The 8th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics、2010年2月6日、浦項工科大学校(大韓民国)
- ③別宮耕一、Mass formula for even codes over Z_8 、Twelfth IMA International Conference on Cryptography and Coding、2009年12月15日、王立農業大学(英国)
- ④宗政昭弘、リーチ格子のフレームとその応用、第54回代数学シンポジウム、2009年8月6日、明治大学
- ⑤別宮耕一、Codes over integer residue rings constructed by bases of Galois rings、The 6th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics、2008年2月9日、国立釜山大学校(大韓民国)

[その他]

ホームページ

<http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~betsumi/>