

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007～2010
 課題番号：19540050
 研究課題名（和文） アファイン幾何結晶の構成と結晶基底の表現論

研究課題名（英文） Construction of affine geometric crystals and Representation theory of crystal bases

研究代表者

中島 俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60243193

研究代表者の専門分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 代数学

キーワード：結晶基底、幾何結晶、熱帯化、超離散化、ヘッケ環、代数群、Tropical R map、保型形式

1. 研究計画の概要

- (1) Affine Kac-Moody群のunipotent 部分群上もしくは、可積分加群上のある種の不変関数を求めることから始める。群上の不変関数については群論の専門家である篠田との協力により研究を遂行する。
- (2) ソリトン理論における無限次元多様体の関係から幾何結晶との結びつきについての考察を行ってみたい。
- (3) 可能であれば初年度中にSteinberg 多様体上の幾何結晶の構成にも着手する。
Steinberg 多様体はHecke 環の表現論と密接に結びついており、Hecke 環の表現論の専門家である五味と共同で幾何結晶の構成に取り組みたい。

2. 研究の進捗状況

(1)アファイン幾何結晶及びそれに付随するトロピカル R マップの具体的構成を行った。

特に、 $D_4^{(3)}$ という例外型のアファインタイプに対してその幾何結晶を具体的に構成した前年の

結果から山根によって構成された $G_2^{(1)}$ 型の完全結晶の極限が超離散化の方法により得られることをしめした。

また、epsilon system と呼ぶある種の幾何結晶上の有理関数の集合がよい性質をもつこともわかってきた。特に、トロピカル R 写像に対しての普遍性と積構造が入ることを明らかにした。

(2) ある種のトロピカル R 写像は幾何結晶の概均質性により一意に決定されることもわかった。幾何結晶の概均質性とは幾何結晶の作用素 e_i による開稠密な軌道が存在することである。我々は、正構造を持つ幾何結晶の概均質性の判定条件が、その超離散化として得られる結晶基底が連結性によって与えられることも合わせて示した。完全結晶はそれ自身及びそれらのテンソル積も連結であることが知られており、それにより我々が構成したアファイン幾何結晶が概均質であることがわかり、最終的にトロピカル R マップの一意性がわかるのである。

また、旗多様体上の幾何結晶と冪単部分群上の幾何結晶の同値性についてすでに出来上がっている A 型以外の B,C,D 型についても示すこ

とができた。

(3) 五味はマルコフトレースについての研究をより一般の場合に拡張することについて研究をすすめている。笹田は有限ユニタリー群について研究をすすめている。都築は保形形式について精力的に研究を推進している。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

発表論文(1)~(4)のような結果を順調に得られたため。

4. 今後の研究の推進方策

KR 加群に対応する完全結晶のある種の極限として得られる結晶基底をその超離散化として持つアフィン幾何結晶とその上の tropical R 写像の構成を目的としてきた。幾何結晶の構成については、最も単純な KR 加群の場合であるがほとんどの affine Kac-Moody 群に対応するものについてほぼ満足できる形で結果を得た。tropical R 写像については、そのうちのいくつかについて具体的に構成できた。また、 sl_2 の場合のみではあるが、普遍的 tropical R 写像を得ることも成功した。さらに、概均質幾何結晶についての判定条件を結晶基底の言葉で記述することもでき、これにより tropical R 写像の一意性について比較的簡単に示せるようになった。イプシロン系を A 型の場合だけであるが、具体的に構成できたことも大きな成果といえる。

上で述べたように、affine 幾何結晶とその上の tropical R 写像について一定の成果を挙げ、当初の目標に近づいたといえるが、同様の方法で新しい結果を得続けるのは難しいと判断した。そこで、幾何結晶上のトロピカル R 写像を普遍的方法で構成することを目指したい。そのために、必要と考えられるイプシロン系の特徴付けを行い、さらに、affine 旗多様体に代表される無限次元幾何結晶の構成とソリトン系との関連につい

て、考察する。また、結晶基底の多面体表示との関係についても研究を広げてみたいと考える。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

(1) 中島俊樹 (M.Igarashi), Affine Geometric Crystal of type $D^{(3)}_4$, Contemporary Mathematics, 506, 215-226, (2010), 査読有.

(2) 中島俊樹, Universal tropical R map of $sl(2)$ and prehomogeneous geometric crystals, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B11, 101-116, (2009), 査読有.

(3) 中島俊樹 (M.Kashiwara M.Okado), Affine Geometric Crystals and Limit of Perfect Crystals, Transactions in American Mathematical Society, 30, 3645-3687, (2008), 査読有.

(4) 中島俊樹, Affine Geometric Crystal of type $G^{(1)}_2$, Contemporary Mathematics, 442, 179-192, (2007), 査読有.

[学会発表](計5件)

(1) 中島俊樹, "Admissible Pictures and Littlewood-Richardson Crystals", International Workshop on Combinatorial and Geometric approach to Representation Theory, 2009年9月21日 Seoul National University, Korea.

(2) 中島俊樹, "Epsilon Systems of geometric Crystals", Geometric Aspects of Discrete and Ultra-Discrete Integrable Systems, (A satellite meeting of the Isaac Newton Institute Programme on Discrete Integrable Systems), 2009年3月31日, The University of Glasgow, United Kingdom.

(3) 中島俊樹, "Geometric Crystals on flag varieties and maximal unipotent subgroups", Workshop, 'Crystals and Tropical Combinatorics', 2008年8月30日, Kansai Seminar House, 京都.

(4) 中島俊樹, "Affine Tropical R and Prehomogeneous Geometric Crystals", Quantum Affine Lie Algebras, Extended Affine Lie Algebras, and Applications, 2008年3月5日, Banff International Research Stations, Canada.

(5) 中島俊樹, "Uniqueness of tropical R", 「組合せ論的表現論の拡がり」, 2007年10月25日, 京都大学数理解析研究所.