様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年　5　月　20　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：19540056
研究課題名（和文）　多重対数関数と多重ゼータ値

研究課題名（英文）　Multiple Polylogarithms and Multiple Zeta Values

研究代表者
上野　喜三雄（UENO, Kimio）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70160190

研究成果の概要（和文）：多重対数関数・多重ゼータ値の調和積を，モジュライ空間 $M_{0,5}$ の上で定義された形式的 KZ 方程式の基本解の分解定理と変換理論を通して，モジュライ空間の幾何学的視点から自然に説明することに成功した．

研究成果の概要（英文）：We studied on the harmonic product of multiple polylogarithms, multiple zeta-values, through the decomposition theorem and the transformation theory for the fundamental solutions of the formal KZ equation defined on the moduli space $M_{0,5}$, from the viewpoint of the geometry of the muduli space.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	900,000	270,000	1,170,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：多重対数関数，多重ゼータ値，KZ 方程式，Drinfeld Associator

１．研究開始当初の背景
（１）多重ゼータ値や多重対数関数には調和積と呼ばれる代数構造が入ることが知られていたが, それを Drinfeld Associator のみたす代数構造から説明することは，この分野における大きな課題であった．(この方向での研究としては，Deligne-Terasoma（寺杣）の先行研究（2004）の後，古庄英和（2008）が決定的な結論を導いている．)

（２）一方，2006 年 3 月までの段階で，申請者を含むグループ（私の研究室の大学院生など）により，2 変数の多重対数関数がみたす KZ 方程式が計算され，基本解の構造を見ることにより多重対数関数の調和積が得られることが分っていた．3 変数の多重対数関数についても同様の結論を得ていた．これらの結果は,「数理解析研究所講究録 1549 巻：多重ゼータ値の研究,『2 変数多重対数関数の接続問題と多重ゼータ値の複シャッフル関係式，及び，2 重対数関数の 5 項関係式』」,「2006 年度日本数学会秋季総合分科会，企画特別講演『多重ゼータ値と多重対数関数』」において発表済みである．これらの具体的な

KZ 方程式に対して後に言うところの「基本解の分解定理」のアイデアを得ている.

（３）具体的な KZ 方程式にあらわれる係数を基本群を局所化したリー環の生成元で置き換えることで得られる「形式的 KZ 方程式」は，多重対数関数あるいはその一般化である超対数関数の母関数であるが，2007 年度始めの段階では，分解定理はおろか，その基本解の存在と一意性すら示すことが出来ていなかった.

（４）KZ 方程式は，共形場理論における「共形ブロック」のみたす微分方程式であるので，「形式的 KZ 方程式」に対応する共形場理論（ここでは，それを『副巾零な共形場理論』と呼ぶことにする）を求めることも念頭にあった.

以上が，この研究プロジェクトを開始した当時の研究背景である.

２．研究の目的

（１）研究プロジェクト開始の 2007 年当時の研究状況からみて，「多重対数関数の調和積（多重ゼータ値の調和積はその極限値として得られる）を形式的 KZ 方程式の基本解の分解定理から導く」という目的は，極めて自然な設定であり，また実現可能なものと思えた.

（２）それと同時に，2 重対数関数の 5 項関係式のような 1 変数多重対数関数（polylogarithm，$Li_k(z)$）の多変数関数等式を，形式的 KZ 方程式の基本解の接続問題として捉えることも目標とした.

1 変数多重対数関数の 1 変数関数等式（オイラーの反転公式のようなもの）はすべて KZ 方程式の基本解の接続問題から得られることが分っている.

（３）その上で，余力があれば，形式的 KZ 方程式に対応する共形場理論の考察を行うことを考えた.

３．研究の方法

「多重ゼータ値や多重対数関数の代数構造を形式的 KZ 方程式の観点から考察する」というのが研究方法の特色である.

形式的 KZ 方程式は，モジュライ空間 $M_{0,n}$ の上で定義された方程式であり，モジュライ空間の無限遠因子に沿って対数特異点をもつ積分可能なパッフ系である．その係数は，モジュライ空間の基本群の中心降下列の隣接商の直和である次数付きリー環 X_n の生成元そのものである．つまり，形式的 KZ 方程式はモジュライ空間の幾何学のみによって決まっている対象である．したがって，多重ゼータ値などをこの観点から考察することは，とりもなおさず，モジュライ空間の幾何学的な視点から多重ゼータ値などの代数構造を考察することを意味する．ここに，この研究方法の特色・利点がある.

４．研究成果

本研究の成果は，電子アーカイヴに公表している大井周氏との共著論文

The formal KZ equation on the moduli space $M_{0,5}$ and the harmonic product of multiple zeta values

に纏められている.（この論文は，現在においても，内容を深化させるべく改訂中であり，論文雑誌に投稿するにはもう少し時間がかかる.）この論文(の未公表改訂版）に沿って研究成果を解説していく.

（１）**射影直線の n 点配置空間** $F_{0,n}$ 上の KZ 方程式とは,

$$dG=\Omega G$$
$$\Omega=\Sigma\ X_{ij}\ d(x_i-x_j)/x_i-x_j$$

というパッフ系である．係数の X_{ij} は基本群 $\pi_1(F_{0,n})$のリー環（正確には，基本群の中心降下列の隣接商の直和である次数付きリー環）の生成元であり,

$$X_{ij}=X_{ji},\ X_{ii}=0,$$
$$\Sigma_i\ X_{ij}\ =\ 0$$
$$[X_{ij},\ X_{kl}]=0\qquad(\{i,j\}\cap\{k,l\}=\phi)$$

という基本関係式をみたす．この関係式の下で系は積分可能であり，また，射影変換群の作用で不変であることが分る．これにより，KZ 方程式が**モジュライ空間**

$$M_{0,n}\ =\ \{射影変換群\}\diagdown F_{0,n}$$

の上で定義されたことになる．なお，基本群の間に

$$\pi_1(F_{0,n})=\pi_1(M_{0,n})\times Z_2$$

が成り立つので，$\pi_1(F_{0,n})$，$\pi_1(X_{0,n})$のリー環はともに X_n である．X_n を「**無限小純組み紐リー環**」という.

（２）（１）で n=4 の場合，$M_{0,4}$上の KZ 方程式は，立方体座標 z_1の，z_1=0,1,∞に対数特異点をもつ常微分方程式になる．それは

$$dG=(Z_1dz_1/z_1\ +\ Z_{11}dz_1/1-z_1)G$$

という形になる．我々はこれを**１変数 KZ 方程式**と呼んだ．このときのリー環 X_4 は，係数 Z_0，Z_{11} から生成される自由リー環になる．この方程式の$z1=0$における正規化された基本解の存在と一意性を，反復積分により解を構成することにより示した．この基本解は，**１変数多重対数関数** multiple polylogarithm

$$Li_{k1\cdots kr}(z)$$

の自然な母関数であり，また，リー環 X_4 の普遍展開環 $U(X_4)$ の完備化における群的な元である．

（３）１変数 z_1 の常微分方程式で，$z_1=0$，$\infty, a_1, \cdots a_m$ に対数的特異点を持つ形式的方程式（方程式の係数が自由リー環の生成元）であるものについて，（２）と同様の考察を行った．この方程式の $z_1=0$ における正規化された基本解は**超対数関数**（hyper logarithms）の自然な母関数になっている．

（４）つぎに（１）で n=5 の場合，$M_{0,5}$ 上の KZ 方程式について考察した．$M_{0,5}$ の立方体座標 (z_1,z_2) を導入すると，KZ 方程式は，$z_1=0,1,\infty$，$z_2=0,1,\infty$，$z_1z_2=1$ に対数的特異点をもつパッフ系である．

$$dG=\Omega G,$$
$$\Omega=Z_1dz_1/z_1 + Z_{11}dz_1/1-z_1 + Z_2dz_2/z_2 + Z_{22}dz_2/1-z_2 + Z_{12}d(z_1z_2)/1-z_1z_2$$

係数の $Z_1,Z_{11},Z_2,Z_{22},Z_{12}$ は，（１）の関係式から定まる基本関係式をみたしている．我々はこれを**２変数 KZ 方程式**と呼ぶ．

（５）モジュライ空間 $M_{0,5}$ は $M_{0,4}$ 上の局所自明なファイバー空間であり，ファイバーP_4（射影直線から 0,1,∞，その他の１点を除いたもの）の２次以上のホモトピー群が消えることより，基本群の間の完全列

$$1 \to \pi_1(P_4) \to \pi_1(M_{0,5}) \to \pi_1(M_{0,4}) \to 1$$

が得られる．しかも，このファイバー空間は連続切断を持つので，この完全系列は分裂することがわかる．ファイバーの基本群 $\pi_1(P_4)$ は２個の元から生成される自由群である．対応するリー環を F_3 とする．これは３個の元から生成される自由リー環である．

基本群の完全列をリー環のレベルで考えることにより分裂完全列

$$0 \to F_3 \to X_5 \to X_4 \to 0$$

が得られる．したがって，

$$X_5= X_4 + F_3 \quad \text{（ベクトル空間の直和）}$$

が成立することになる．X_4 は，（２）で見たように二つの元から生成される自由リー環である．すなわち，$X_4=F_2$ である．以上で，X_n に対する**分解定理**

$$X_5= F_3 + F_2$$

である．普遍展開環に移れば，**分解定理**

$$U(X_5) = U(F_3) \times U(F_2)$$

が得られる．ここで，×はテンソル積を表すとする．この分解は２通りの仕方で実現される．

$$U(X_5)=C\langle Z_2,Z_{22},Z_{12}\rangle \times C\langle Z_1,Z_{11}\rangle$$
$$=C\langle Z_1,Z_{11},Z_{12}\rangle \times C\langle Z_2,Z_{22}\rangle$$

ここで，$C\langle Z_2,Z_{22},Z_{12}\rangle$ などは Z_2,Z_{22},Z_{12} で生成される非可換多項式環であり，×はテンソル積である．

（６）２変数 KZ 方程式の原点 $(z_1,z_2)=(0,0)$ において正規化された基本解の存在と一意性を示すには，立方体座標における反復積分の代数について考察する必要がある．反復積分できる多重微分形式は **Chen の可積分条件**をみたす必要がある．

$$dz_1/z_1,\ dz_1/1-z_1,\ dz_2/z_2,\ dz_2/1-z_2,\ d(z_1z_2)/1-z_1z_2$$

で生成される微分形式で Chen の可積分条件をみたすものを B と記し，**被約バー代数**と呼んだ．B は U(X5)の双対ホップ代数であり，（５）の分解定理に対応して，

$$B \equiv S(dz_2/z_2,dz_2/1-z_2,z_1d(z_2)/1-z_1z_2) \times S(dz_1/z_1,dz_1/1-z_1)$$
$$\equiv S(dz_1/z_1,dz_1/1-z_1,z_2d(z_1)/1-z_1z_2) \times S(dz_2/z_2,dz_2/1-z_2)$$

が成立する．ここで，$S(dz_1/z_1,dz_1/1-z_1)$ などは $dz_1/z_1,dz_1/1-z_1$ で生成される自由シャッフル代数を意味し，≡は同型を意味する．この同型対応は，ホップ代数としての同型になっている．

（７）以上の準備のもとで，２変数 KZ 方程式の原点において正規化された基本解

$$L(z_1,z_2)$$

の存在と一意性が保証される．これは KZ の方程式の微分形式Ω（４）を使って**反復積分**

表示される．

定理１（基本解の反復積分表示）

$$\Omega_0 = Z_1 dz_1/z_1 + Z_2 dz_2/z_2,$$
$$\Omega' = \Omega - \Omega_0$$

とすると，

$$L(z_1,z_2)=\Sigma_s \int_C \{ad(\Omega_0)+\mu(\Omega')\}^s (1\times I) \times z_1^{Z1} z_2^{Z2}$$

である．右辺の積分∫は反復積分，ad は $U(X_5)$ における随伴表現，μは $U(X_5)$ における乗法，1 は B の単位元，I は $U(X_5)$ の単位元である．そして，

$$\{ad(\Omega_0)+\mu(\Omega')\}^s (1\times I) \in B\times U(X_5)$$

である．

（８）（５），（６）で確立された分解定理に対応して基本解も分解する．

定理２（基本解の分解）つぎが成立つ．

$$L(z_1,z_2) = L_{2\times1}^{(2)} L_{2\times1}^{(1)} = L_{1\times2}^{(1)} L_{1\times2}^{(2)}$$

ここで，$L_{2\times1}^{(1)}$は１変数 KZ 方程式

$$dG=(Z_1 dz_1/z_1 + Z_{11} dz_1/1-z_1)G$$

の $z_1=0$ において正規化された基本解，$L_{2\times1}^{(2)}$ は１変数多点 KZ 方程式

$$dG=(Z_2 dz_2/z_2+Z_{22} dz_2/1-z_2+Z_{12} z_1 dz_2/1-z_1 z_2)G$$

の $z_2=0$ において正規化された基本解である．$L_{1\times2}^{(1)}$，$L_{1\times2}^{(2)}$ は１と２を入れ替えたものである．また，この分解は，反復積分表示（７）において，積分路 C を

$$C_{2\times1}: (0,0) \to (z_1,0) \to (z_1,z_2)$$

とした場合と，

$$C_{1\times2}: (0,0) \to (0,z_2) \to (z_1,z_2)$$

とした場合に対応している．

（９）（８）の考察から，基本解 $L(z_1,z_2)$は，1 変数多重対数関数と超対数関数の適当なコンビネーションで表されていることがわかる．この表示が分解 $L_{2\times1}^{(2)}$ $L_{2\times1}^{(1)}$ と $L_{1\times2}^{(1)} L_{1\times2}^{(2)}$ のそれぞれについて存在する．したがって，それらの相等性

$$L_{2\times1}^{(2)} L_{2\times1}^{(1)} = L_{1\times2}^{(1)} L_{1\times2}^{(2)}$$

より，これら１変数多重対数関数と超対数関数のコンビネーションの間に関係式が生じることになる．我々はこれを，「**超対数関数についての調和積関係式**」と呼んだ．さらに，調和積関係式の或る特定の部分に着目すると，多重対数関数の調和積が出てくることを確かめた．

定理３（主定理）つぎのことが成立する．

{多重対数関数の調和積}
⊂ {超対数関数の調和積関係式}

結局，多重対数関数（多重ゼータ値）の調和積が，モジュライ空間 $M_{0,5}$ の幾何学から自然に説明されたのである．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）いずれも査読なし

① 上野喜三雄：『2 変数多重対数関数の接続問題と多重ゼータ値の複シャッフル関係式及び 2 重対数関数の 5 項関係式』，京都大学数理解析研究所講究録 1549 号「多重ゼータ値の研究」2007 年 4 月刊行，p194-209.

② 大井周，上野喜三雄：『2 変数 KZ 方程式の接続問題と多重対数関数の調和積』，京都大学数理解析研究所講究録 1662 号「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」2009 年 8 月刊行，p28-46.

③ 大井周，上野喜三雄『Iterated integrals and relations of multiple polylogarithms』，京都大学数理解析研究所講究録「表現論と組合せ論」に掲載予定．(pp16).

〔学会発表〕（計４件）

① 大井周，上野喜三雄：『2 変数 KZ 方程式の接続問題と多重対数関数の調和積』，京都大学数理解析研究所短期共同研究「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」2008 年 2 月 3 日～2 月 6 日.

② 大井周，上野喜三雄『2 変数形式的 KZ 方程式と多重対数関数の調和積』，日本数学会 2009 年度年会(2009 年 3 月 29 日)一般講演.

③ 大井周，上野喜三雄『Iterated integrals and relations of multiple polylogarithms』，

京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と組合せ論」（2009 年 8 月 25 日～28 日，於北海道大学）招待講演.

④　大井周，上野喜三雄『2 変数 KZ 方程式の解の変換理論と dilogarithm の 5 項関係式』，日本数学会秋季総合分科会（2009 年 9 月 24 日～27 日）一般講演.