様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 6 月 26 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540059
研究課題名（和文）　Multiplier Ideals の可換環論的構造の研究

研究課題名（英文）　Study on multiplier ideals from the point of view of commutative ring theory
研究代表者
高山　幸秀（TAKAYAMA YUKIHIDE）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：20247810

研究成果の概要：射影代数多様体の小平消滅定理の正標数の体上での反例である M. Raynaud の偏曲曲面(X,L)の構成法を検討し、コホモロジー H^i(X, L^n)　i=0,1,2 の計算公式を与え、コホモロジーの n に関する消滅・非消滅の挙動を調べた。さらに、小平消滅の反例を与える豊富な因子 L について、新しいクラスを発見した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数学、可換環論、代数幾何学

１．研究開始当初の背景

近年、高次元代数幾何学や特異点理論において、乗数イデアル(multiplier ideal)の研究が盛んに行われている。これは９０年代初頭にNadel [9], Demailly [1], Siu [10]らによって複素解析幾何学における多重劣調和関数のコホモロジー理論として導入され、小平型消滅定理が示された。後にEsnault, Viehweg らのアイディアにより embedded resolution をとってから元の空間に push downするという代数化された定義が導入され現在に至っている。乗数イデアルと類似の概念として、Lipman [7]はadjoint idealを導入している。embedded resolutionを行うには広中の特異点解消定理を使わなければならず、従って乗数イデアルは標数零の体の上で定義される。しかしながら、Smith [11], 高木 [12]、原, 吉田 [3] により、乗数イデアルの対応物がHochsterとHunekeらによる密着閉包(tight closure)理論におけるtest idealの一種として構成できることが見出され、特異点解消という言わばブラックボックスを経由しない、より代数的に制御しやすい理論としても整備されつつある。

乗数イデアルが重要な研究対象として精力的に研究されている理由は、まず、強力で使いやすい小平型消滅定理にあると考えられる。小平消滅定理はベクトルバンドルの豊富性を仮定するが、豊富性の判定は一般には難しい。川又-Viehweg消滅定理はQ因子の概念を導入して豊富性条件を緩めているものの、Q因子の単純正規交叉（snc）性を仮定しており、この条件も直接判定することは一般に難しい。ところが、乗数イデアルの概念はsnc性を直接経由せずに小平型消滅定理が使えるところが優れている。また、特異点理論や高次元代数幾

何学における重要な特異点は、embedded resolutionを使って標準因子のずれ方の度合い（crepancy）によって定義されており、乗数イデアルはその定義から自然に特異点の情報を含んでいる。以上のことから過去１０数年の間、乗数イデアルは因子の特異点、豊富な因子に関する松阪の大定理の別証明、ネフかつビッグな因子による線形系の固定点の記述、随伴線形系の大域生成性（藤田予想）、構成的ヒルベルト零点定理、記号冪(symbolic power）の上限問題、多重種数の理論、森プログラムにおけるフリップの存在および停止性問題等等、代数幾何学のさまざまな問題に応用され、同時に理論自身の整備も進められている。

しかしながら、乗数イデアルの可換環論の立場から見た構造については十分解明されているとは言い難く、本格的研究は始まったばかりの状態であると考えられる。例えば「どのようなイデアルが乗数イデアルになりうるか？」といった素朴な問題に対しても、十分な解答が得られていない。先駆的研究としては、Howald [4]によって単項式イデアルから作られる乗数イデアルが決定され、単項式イデアルについてはかなり見通しが良くなったといえる。より一般的には、乗数イデアルは整閉であることは容易にわかるが、その逆はどうかについては十分に分かっていない。Lipman-渡辺 [8]やFavre-Jonsson [2] によって２次元の正則局所環の整閉イデアルは全て乗数イデアルになることが示された。この研究は最近Hyry-中村-Ojala [5] によって深められ、GorensteinなRees環との関係が明らかになり、さらにLazarsfeld-Lee [6] によって高次元の正則局所環の場合に部分的な拡張が試みられ、３次元以上の正則局所環の場合、乗数イデアルのシチジーの構造が初めて考察され、その結果、整閉イデアルのごく特殊なものだけが乗数イデアルになりうることが示された。しかし、具体的にそれはどのようなものかは十分解明されていないし、正則局所環という条件を緩めた場合はどうなるかとか、シチジーのより詳しい様子などはわかっていない。このように乗数イデアルは可換環論の立場から見ても非常に興味深い対象であるものの、代数幾何学の道具としての整備や応用面の理解に比して、可換環論的な性質や構造の解明・理解はまだ十分に行われていない状態だと考えられる。

参考文献

[1] J-P. Demailly, A numerical criterion for very ample line bundles, J. Differential Geom. 37 (1993), no. 2, 323-374.

[2] C. Favre and M. Jonsson, Valuations and multiplier ideals, J. Amer. Math. Soc. 18(2005), no.3, 655-684.

[3] N. Hara and K-i. Yoshida, A generalization of tight closure and multiplier ideals, Trans. Amer. Math. Soc. 355(2003), no. 8, 3143-3174.

[4] J. Howald, Multiplier ideals of monomial ideals, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 7., 2665-2671.

[5] E. Hyry, Y. Nakamura and L. Ojala, Adjoint ideals and Gorenstein blowups in two-dimensional regular local rings, arXiv:math.AC/0601327v1 13 Jan 2006/10/08

[6] R. Lazarsfeld and K. Lee, Local syzygies of multiplier ideals, arXiv:math.AG/0604563 v1 26 Apr 2006/10/08

[7] J. Lipman, Adjoints of ideals in regular local rings, Math. Res. Lett. 1 (1994), no. 6, 739-755.

[8] J. Lipman and K-i. Watanabe, Integrally closed ideals in two-dimensional regular local rings are multiplier ideals, Math. Res. Lett. 10 (2003), no. 4, 423-434.

[9] A. Nadel, Multiplier ideal sheaves and Kaehler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Ann. of Math. (2) 132 (1990), no. 3, 549-596.

[10] Y-T. Siu, An effective Matsusaka big theorem, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 5, 1387-1405.

[11] K. E. Smith, The multiplier ideal is a universal test ideal. Special issue in honor of Robin Hartshorne, Comm. Algebra 28(2000), no. 12, 5915-5929.

[12] S. Takagi, An interpretation of multiplier ideal via tight closure, J. Algebraic Geom. 13(2004), no. 2, 393-415.

２．研究の目的

本研究の目的は、乗数イデアルのシチジー、極小自由分解、ヒルベルト級数、重複度、局所コホモロジーの特性や構造を解明することによって、乗数イデアルを可換環論の立場からの理解することを目指すものである。特に、

Howaldの結果に基づく単項式イデアルの乗数イデアルの構造解明、Lazarsfeld- Lee らの結果を発展させた乗数イデアルのシチジーの構造の解明、Hyry-中村-Ojala の結果を発展させたRees環などのBlow-up代数との関連の解明を目指し、それらを足がかりにして、より深い乗数イデアルの構造理論を追究する。

３．研究の方法

基本的には個人研究であるが、毎年開催される可換環論シンポジウムやアフィン代数幾何学研究集会、日本大学文理学部にて、ほぼ毎月１度の割合で開催される特異点理論月曜セミナー、単発的に開催される国際シンポジウムなどに積極的に参加し、関連分野の最新の研究動向の把握に努めたり、研究の途中結果を口頭発表して専門家から意見を求めるといったことも行った。

乗数イデアル理論は消滅定理や密着閉包理論における対応物といったものを通して、小平型消滅定理や密着閉包理論と関連が深い。我々はこれまでに密着閉包理論における孤立Ｆ有理特異点の局所コホモロジーの非消滅定理を得ていたので、その理論を発展させる目的で小平消滅定理の反例として有名なM. Raynaudの偏極曲面(X, L)に注目した。K.E.Smith とC. Hunekeの切片環による小平消滅定理の局所コホモロジーによる解釈[13]を使えば、両者は関連づけられるからである。

Raynaudの反例やその周辺の問題は、１９８０年前後D. Mumford[15.16], L. Szpiro [19,20], P.Russel [18], 丹後弘志[25,26]、向井茂[14]、その他の研究者らによって精力的に研究されており、現在でも武田好史[21,22,23,24]らによって深い研究が行われている。我々は代数幾何学の標準的な議論のスタイルやテクニックについて詳しくなかったため、適当な教科書で代数幾何学の基礎を学び直しながらこれらの先行研究を調査し、切片環との関連を検討した。

また、代数幾何学の勉強とRaynaudの反例の検討に思いのほか時間を取られることになり、乗数イデアルのイデアル論的性質の研究の方にはあまり手が回らなかった。

また、当初の研究計画では組合せ論的可換環論との関連も視野に入れていた。ここでは単項式イデアルが考察の中心になるが、単項式イデアルの局所コホモロジーの消滅次数については、既に小平型消滅定理が成り立つことが知られているため、コホモロジーの挙動は比較的単純であるとも考えられる。このような観点から、本研究においては小平型消滅が成り立たない場合に重点を置いて考察することにし、より代数幾何学的な例の検討に力を入れることにした。

以上の研究活動において、代数幾何学の基礎を学ぶ上でも、研究集会やシンポジウムなどによる多くの研究者との交流は大変有益であったし、さらに、多くの書籍や資料の購入も必要であり、科研費の大半は出張旅費と書籍・資料の購入費用として執行した。

参考文献

[13] C. Huneke and K. E.￥ Smith, Tight closure and the Kodaira vanishingtheorem. J. Reine Angew. Math. 484 (1997), 127--152.

[14] S. Mukai, On counter-examples for the Kodaira vanishing theorem and the Yau inequality in positive characteristics (in Japanese), in Symposium on Algebraic Geometry, Kinosaki, 1979, pp.9--23.

[15] D. Mumford, Pathologies III, Amer. J. Math., 89, 1967.

[16] D. Mumford, Some footnotes to the work of C. P. Ramanujam, in ``C.￥P.￥Ramanujan -- A tribute'', pp247--262, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math. 8, Springer, 1978.

[17] M. Raynaud. Contre-exemple au "vanishing theorem" en caracteristique p>0. C. P. Ramanujam---a tribute, pp. 273--278, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., 8, Springer, Berlin-New York, 1978.

[18] P. Russell, Factoring the Frobenius morphism of an algebraic surface. Algebraic geometry, Bucharest 1982 (Bucharest, 1982), 366--380, Lecture Notes in Math., 1056, Springer, Berlin, 1984.

[19] L. Szpiro, Le theoreme de la regularite de l'ajointe de Gorenstein a Kodaira, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto 1978, pp.93--102.

[20] L. Szpiro, Sur le theoreme de rigidite de Parsin et Arakelov. Journees de Geometrie Algebrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. II, pp.169--202. Asterisque, 64, Soc. Math. France, Paris, 1979.

[21] Y. Takeda, Fibrations with moving cuspidal singularities, Nagoya Math. J. Vol. 122 (1991) 161--179

[22] Y. Takeda,Vector fields and differential forms on generalized Raynaud surfaces,
Tohoku Math. J, 44 (1992), 359--364

[23] Y. Takeda, Pre-Tango structures and uniruled varieties. Colloq. Math. 108 (2007), no. 2, 193--216.

[24] Y. Takeda and K. Yokogawa, Pre-Tango structures on curves. Tohoku Math. J. (2) 54 (2002), no. 2, 227--237.

[25] H. Tango, On the behavior of extensions of vector bundles under the Frobenius map, Nagoya Math. J., 48, 73--89, 1972.

[26] H. Tango, On the behavior of cohomology classes of vector bundles under the Frobenius map, RIMS Kokyuroku~144, 1972, 93--102. (in Japanese)

４．研究成果

丹後-Raynaud曲線Cとその上の丹後構造と呼ばれる豊富な因子Dが与えられたとき、それから構成されるC上の線織面Pは、フロベニウス写像によって、その∞切断Eと交わらない曲線Gを含みむことがわかり、GはCの次数pの純非分離的被覆になっている。

そこでE+Gで分岐する巡回被覆Xと、DとEから適当な方法で構成される豊富因子Lの組(X,L)が小平消滅定理の反例を与える。すなわち、H^1(X, L^{-1})が自明にならない。Raynaudの反例では、巡回被覆は体の標数がp=2の場合は３次、それ以外は２次の被覆を考えていた。しかし適当な条件の下で、それ以外の次数の被覆を考えることができる。

巡回被覆を取る際正規化を許せばこの次数はかなり自由にとることができる。しかし、正規化を行うとコホモロジーの計算が難しくなるため、特にH^i(X, L^n)のnを色々変えて計算したい場合には正規化を避けることが望ましい。そこで我々は巡回被覆の次数に一定の条件をつけた。

我々は次の結果を得た：

１．H^2(X, L^n)を、線織面P上の直線束のコホモロジーで書き表す公式。
２．１．の公式の応用として、H^2(X, L^n)の消滅定理。特に、nがp(p+1)以上ならば、コホモロジーが自明になること。
３．nが非負整数の場合、H^1(X, L^n)を曲線C上のベクトルバンドルのコホモロジーと線織面P上の直線束のコホモロジーで書き表す公式。
４．nが負の整数の場合、H^1(X, L^n)を曲線C上のベクトルバンドルのコホモロジーで書き表す公式。
５．４．の応用として、nが負の整数の場合、H^1(X, L^n)が非自明になる範囲の、巡回被覆の次数による評価。
６．H^0(X, L^n)を曲線C上のベクトルバンドルのコホモロジーで書き表す公式。
７．その応用としてH^0(X, L^n)が非自明になるnの上限の評価。

以上の結果は、偏極曲面の構成についてはRaynaudのオリジナルな方法や、向井茂による拡張などを参考にし、また、コホモロジーの計算については、Lerayのスペクトル系列、線織面の理論、射影バンドルの理論といった代数幾何学の基本的な道具を駆使した。

また、上の結果においては基本的にRaynaudが構成した反例の自明な拡張で考えている。より正確に言えば、偏極LはMunford-Szpiro型と呼ばれるものである。しかしRaynaudの方法を詳しく調べてみると、それ以外の偏極でも上記と同様の議論ができることを発見した。すなわち、こ上記のLを作るときに、因子のEやDを何倍かしたものを使うのだが、この倍数が、かなり自由にとれることがわかった。

また、ここで得られた結果は切片環の理論を経由して、次数付可換環の局所コホモロジーの消滅次数の結果として読み替えることができるが、偏極が十分豊富ではないため、可換環論の結果としてはやや不十分であると言わざるを得ず、今後の課題を残す結果となった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）
〔学会発表〕（計０件）
〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）
〔その他〕
Yukihide Takayama,
On non-vanishing of cohomologies of generalized Raynaud polarized surfaces, arXiv.math.AG:0805.0524 Version4, 6. January 2009

６．研究組織
(1)研究代表者
高山　幸秀（TAKAYAMA YUKIHIDE）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：20247810

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし