

研究種目： 基盤研究 (C)
研究期間： 2007~2010
課題番号： 19540062
研究課題名 (和文) 幾何解析を用いたスカラー曲率一定な超曲面の構成の研究
研究課題名 (英文) Study on the construction of hypersurfaces with constant scalar curvature by using geometric analysis
研究代表者 岡安 隆 (OKAYASU TAKASHI) 茨城大学・教育学部・教授 研究者番号： 00191958

研究代表者の専門分野：数物系科学
 科研費の分科・細目：数学・幾何学
 キーワード：スカラー曲率, 超曲面

1. 研究計画の概要

ユークリッド空間の完備な超曲面でスカラー曲率一定なもの例は回転面といくつかの例が知られているだけである。この研究の第一の目標は, *cohomogeneity* が 2 である一般化された完備回転超曲面でスカラー曲率一定なものを構成することである。以前の研究により, スカラー曲率を各軌道の体積関数とその微分で表現する公式を得ている。

その常微分方程式系に対して, 第一積分をもつような良い常微分方程式系を比較のため考えることにより, 解曲線の大域的性質を調べ, 完備超曲面の存在を示す。

第二の目標は, スカラー曲率一定な完備超曲面であって, *end* を 3 つ以上もったものを構成することである。3次元ユークリッド空間の中で平均曲率一定な完備曲面を最初に構成したのは, Kapouleas であった。彼は球面に Delaunay 曲面の *end* を 3 つ連結してできる曲面を摂動して構成したのであった。これをまねて, 球面にスカラー曲率一定な回転超曲面の *end* を 3 つ連結したものを考え, これを摂動してスカラー曲率一定な超曲面を構成できないかを調べる。

2. 研究の進捗状況

(1) 研究体制としては, 岡安は微分幾何の立場から研究を押し進め, 研究分担者の柳田は位相幾何の立場から研究を進め, 随時話し合うことにより研究の進展状況をチェックしている。

(2) 毎年, 学会, 研究集会, もしくは国際学会で研究を発表してきた。

(3) これまでに得られた成果は次のよう

ある。

①直交回転群の積で不変な, 一般化された回転面でスカラー曲率一定な完備超曲面の構成ができた。さらに, その副産物として, ある種の非線形微分方程式系の比較定理を得ることができ, その応用として *cohomogeneity* が 2 である一般化された完備回転超曲面で, 第二基本形式の長さが一定なもので合同でないものを, 無限個構成することができた。この手法は各種の Weingarten 曲面にも応用できることがわかった。

②一般の Riemann 多様体上に第二基本形式の長さが一定なコンパクト超曲面が存在するかを研究し, つぎの結果を得た。

定理 (M,g) を Riemann 多様体とし, p をスカラー曲率関数の非退化な *critical point* とする。このとき p を中心とする十分小さな距離球面は, 微小変形することにより第二基本形式の長さを一定にできる。この結果は, 平均曲率については R.Ye が, 高次の平均曲率については F.Mahmoudi が証明していた。

③一般の Riemann 多様体上にスカラー曲率が一定なコンパクト超曲面が存在するかを研究し, つぎの結果を得た。

定理 (M,g) を Riemann 多様体とし, p をスカラー曲率関数の非退化な *critical point* とする。このとき p を中心とする十分小さな距離球面は, 微小変形することによりスカラー曲率を一定にできる。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

「研究の進捗状況」で記述したように、現在までに大きく分けて3つの主要な結果を得た。ひとつめは、ユークリッド空間の完備超曲面で、第二基本形式の長さが一定なものを無限個構成することができた。第二基本形式の長さが一定な超曲面の研究はほとんどなされてこなかったと思われるので、重要な結果であると考えられる。二つめは、一般の Riemann 多様体上に第二基本形式の長さが一定なコンパクト超曲面が存在することが証明できた。さらに三つめは、一般の Riemann 多様体上にスカラー曲率が一定なコンパクト超曲面が存在することが証明できた。

研究計画での第二の目標「スカラー曲率一定な完備超曲面であって、end を3つ以上もったものを構成すること」の研究が未完成で、現在進行中である。

以上の理由により、おおむね順調に研究が進展していると判断した。

4. 今後の研究の推進方策

当初の計画に則って研究を推し進める。今年度は研究の最終年度であるので、今まで得た結果を論文として完成させ、雑誌に投稿したい。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計4件)

1. 岡安隆 「Riemann 多様体での第二基本形式の長さが一定な超曲面の存在について」、日本数学会秋季総合分科会、2009年9月24日、大阪大学
2. 岡安隆 “A construction of complete hypersurfaces with constant scalar curvature in the Euclidean space”, The ninth Pacific Rim Geometry Conference (第9回環太平洋幾何学研究集会), 2008年12月, (国立台湾大学、台湾)
3. 岡安隆 「Riemann 多様体における第二基本形式の長さ一定な超曲面の存在について」、新潟微分幾何学研究集会、2008年11月6日、新潟大学
4. 岡安隆 “A construction of complete hypersurfaces with constant scalar curvature”, 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, 2007年8月31日, (Palacky University, チェコ)