

平成22年 5月10日現在

研究種目：基盤研究 (C)
研究期間：2007～2009
課題番号：19540066
研究課題名 (和文) 積分不可能分布の位相的、力学系的研究
研究課題名 (英文) TOPOLOGICAL AND DYNAMICAL STUDY
OF NON-INTEGRABLE DISTRIBUTIONS
研究代表者
稲葉 尚志 (INABA TAKASHI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40125901

研究成果の概要 (和文)：多様体上の積分不可能な接平面分布を大域的な見地から考察した。本研究では特に、そのような分布の複雑さを測る手段の一つとしてエントロピーを採り上げ、その有効性を調べた。積分不可能分布に対するエントロピーの概念は2005年にビシュによって初めて導入されたが、ここでは彼とはやや異なった定義を与え、彼の論文では計算されていなかった4次元多様体上の非アフィンなエンゲル分布のエントロピーの消滅を証明した。

研究成果の概要 (英文)：In this research we investigated non-integrable tangent distributions on manifolds from the global viewpoint. In particular, we took up the notion of entropy and examined its significance in measuring the complexity of such distributions. The notion of entropy for non-integrable distributions was first introduced by Bis in 2005. We gave a somewhat different definition from his one, and proved the vanishing of the entropy for non-affine Engel distributions on 4-dimensional manifolds.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジー

1. 研究開始当初の背景

(1) これまで、積分不可能分布は主として局所的な同型問題が研究の対象とされ、微分幾何学的見地やリー代数的構造の観点から深い考察がなされてきた歴史を持っている。微分方程式の解の幾何学的考察においても不可欠な対象である。現在に至ってもそれら

の研究は極めて重要であり、多くの研究者によって更に発展しつつある。しかしながら、大域的な視点、位相的力学系の視点からの研究は少ない状況であった。

(2) エントロピーの概念は、力学系に対してまず定義され、その後葉層構造 (積分可能分

布)に拡張されたが、積分不可能分布にまで拡張されたのは2005年のビシュの論文が最初であった。積分不可能分布に対してエントロピーが計算された例はまだ極めて少ない状態である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、積分不可能な接分布を位相幾何学と力学系理論の視点から考察することにより、これまでの研究とは異なった切り口から、それらの大域的挙動を解明していくことである。具体的には次の3つを目指した。

(1)剛的部分多様体の研究。剛的部分多様体の存在は積分不可能分布特有の興味深い現象であり、その全貌の解明を目指した。更に、自由摂動に関する剛的「閉」部分多様体についての考察も目標とした。

(2)積分不可能分布のエントロピーの研究。定義の確立及び非自明エントロピーを持つ分布の構成に重点を置いた。

(3)3つ目はアフィンエンゲル構造とタイト性との関係を解明することである。

3. 研究の方法

研究目的欄に記した3項目を同時並行的に行っていく方法をとった。

(1)「剛性」については、モンゴメリー・ジトミルスキーのモンスターグルサ分布やモルミュールの特別 k -旗等を具体的対象として考察を深めた。

(2)エントロピーについては、最初に定義の確立を優先した。次に、正エントロピーをもつ分布の満たすべき位相的性質について研究した。

(3)アフィンエンゲル構造については、それを許容する多様体の位相的条件、特性直線場の力学系の性質、コチック・フォーゲルの双エンゲル構造との関係を明らかにすべく考察を進めた。

(4)研究体制としては、研究協力者(海外共同研究者)としてウッジ大学(ポーランド)・数学部・教授のPawel WALCZAKを加えた6人体制で臨んだ。研究代表者稲葉を坪井, 中山, WALCZAKが全般に渡って協力し, 久我, 杉山が各専門分野から専門的協力を行うという形で遂行した。関連する研究を行っている国内の研究者たちとの研究連絡も不可欠であり, そのために出張旅費を必要とした。海外共同研究者とは,

電子メール等により随時研究連絡を行った。

4. 研究成果

(1)剛的部分多様体に関しては、自由摂動を一切許容しない接閉部分多様体の存在について考察を進めた。既に、トーラスと微分同相な接閉部分多様体の例は構成していたが、トーラス以外の多様体が剛的接閉部分多様体になる例はまだ見つかっていない。種々の構成の試みを行なったが、本研究期間中には発見までには至らなかった。

(2)エントロピーについては以下に述べるような成果を得た。

積分不可能分布に対してエントロピーを定義しようとするときの最初の困難は、多様体上の1点 p から出発し、各点で分布に接する曲線 c が与えられたとき、 p に近い点 q を出発し、曲線 c に出来るだけ「近い」曲線たちを制御する標準的な方法が見当たらないことである。この点が力学系の場合や葉層構造(すなわち、積分可能分布)の場合と決定的に異なる。「近い」の意味をどう考えて、 c の近傍の曲線たちを制御するかが良い定義、意味のある定義とするための鍵と成る。

2005年にTopology and its applications誌に出版されたAndrzej Bisの論文では、積分不可能分布に対するエントロピーを、近傍の曲線たちの長さが元の曲線 c の長さを超えないという制限で制御することにより、初めて意味有る定義とすることに成功したが、その定義ではエントロピーの具体的な計算が容易でなかった。Bisのその論文では、すべての接触分布に対してエントロピーは消滅する、という結果が得られたに留まっていた。しかもその証明は微分幾何学の諸定理を適用して得られる接触分布特有の性質を動員するため、接触分布以外の積分不可能分布には拡張できないものであった。

本研究では、その欠点を克服すべく、Bisの定義とは異なる定義を創案した。すなわち、与えられた接曲線 c の近傍の接曲線を考える際、単なる長さの制限ではなく、連続微分の意味において元の接曲線 c に近いもののみを考えるのがよいであろうというアイデアに想到し、それを定義に組み込むことにしたのである。一般に、積分不可能分布において接曲線の摂動を考えると、連続微分可能性に関する近さが摂動の自由度に敏感に関わってくるという現象があることを考慮すれば、この定義はある意味で自然な定義であると言えるであろう。

この新定義のもとでは、接触分布に対するエントロピーの消滅定理を接触分布の微分幾何学的特有性質に訴えることなく初等的に証明できる。また、接触構造以外の積分不可能分布として、4次元多様体上のエンゲル分

布（2次元分布であって、ブラケット生成的なもの）に対するエントロピーについて非アフィンの場合にその消滅の証明に成功した。ここで、エンゲル分布が非アフィンであるとは、その導分布のカルタン特性系のなす1次元葉層構造が自然に持つ接射影構造に関する各葉の展開写像が円周への全射であるときにいう。この証明は接触分布にたいする消滅の証明と同様の道筋を辿ってなされるので、他の分布に対しても適用できる可能性が高い。このことに関しては今後の研究課題としたい。

なお、以上の結果については、非自明エントロピーをもつ積分不可能分布の例が（有力候補としてアフィンなエンゲル分布を考えているが）まだ確定できていないので、論文化していない。論文化及びその出版は、それが確定できてからと考えている。

(3) アフィンエンゲル分布はエンゲル分布のうちで「緩み」の少ない分布であると考えている。フォーゲル(2009, *Ann.Math.*)によって任意の4次元平行化可能多様体上にはエンゲル分布が存在することが示されたが、アフィンエンゲル分布については、3次元接触分布の場合のタイト分布と同様に、存在問題（すなわち、与えられた4次元平行化可能多様体上に存在するか）が重要な問題となる。

アフィンエンゲル分布（であって、しかも、横断構造として現れる3次元接触構造がタイトであるもの）の例の構成については研究代表者の把握しているところでは、コチック・フォーゲルの双エンゲル分布、フォーゲルの4次元 Nil 多様体、ワルチャックの Anosov 流の写像トーラス、の3つがあるが、存在や非存在のための必要条件については殆ど何も知られていない。

本研究では、4次元多様体上の1次元葉層構造が与えられたとき、その上に展開写像が円周への全射な展開写像を持たないような接射影構造が入らないための条件を考察したが、これは、エンゲル分布の導分布のカルタン特性系のなす1次元葉層構造が自然な接射影構造を持っていることに注意するとき、アフィンエンゲル分布の非存在のための必要条件と密接に関連していると言える。これについても今後の継続研究が必要な状況である。

(4) 本研究を力学系の視点から研究している過程で、実1次元力学系に関する次の結果を副産物として得ることができた。

定理1：任意の自然数に対して、閉区間上の単峰写像であって、頂点の軌道の極限集合がその自然数を深度とする可算集合になるも

のが存在する。

定理2：閉区間上の全射単峰写像であって、任意の自然数に対して、或る点の軌道の極限集合がその自然数を深度とする可算集合になるものが存在する。

定理1には2通りの証明を与えた。ひとつは具体的な構成による方法である。区間の点を2進法で表し、写像を無限個の折れ点をもつ区分解線形写像として実現した。この方法では定義が明記されているので、軌道の挙動が完全に把握できる。もうひとつは Hofbauer - Keller (1990, *Comm. Math. Phys.*) の kneading 理論に関する定理を適用する方法である。この方法で得られる写像は2次関数であり、滑らかさの観点から見て、望み得る最高の関数であると言える。しかし、存在定理を適用して得られる結論であるため、軌道の特定が出来ない点は第1の方法に劣る。

以上の結果は学術誌 *Journal of Dynamical and Control Systems* に受理済みであり、2010年に出版の予定である。

(5) 本研究の研究分担者は、関連する研究において成果を上げた。

坪井俊の上げた成果は以下の通りである。

まず、すべての葉が稠密であるような葉層構造において、すべての葉の基本群が無限巡回群である場合、葉層構造はホロノミーを持たないことを示した。

次に、ある種の接触微分同相のなす群が単純群であることを示した。

更に、微分同相群の一樣完全性について研究し、ある種の偶数次元閉多様体の微分同相群の恒等写像の成分の元は、4個の交換子の積で書かれること、奇数次元閉多様体の微分同相群の恒等写像の成分の元は、5個の交換子の積で書かれることを示した。

中山裕道の上げた成果は以下の通りである。まず、局所連結で連結な不変集合を持つ葉層構造について、正のエントロピーを持つ例の構成、ワンダリング・ドメインの挿入法、逆極限から自然に定義される例におけるエントロピーの計算を行った。

また、3次元多様体の非特異流の射影化流がちょうど2つの極小集合を持つ場合について、dominated splitting が存在するか、もしくは、極小集合の間に極小集合には近づかない軌道が存在することを証明した。久我健一は4次元結び目のカンドルに関する結果を得た。

杉山健一は数論における大予想の幾何学版に関していくつかの重要な貢献をした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

Takashi Inaba and Yosuke Kano :
Countable limit sets of unimodal maps,
Journal of Dynamical and Control Systems,
2010 掲載決定、査読有。

Takashi Tsuboi: On the simplicity of the
group of contactomorphisms, Advanced
Studies in Pure Math. 52, Groups of
Diffeomorphisms (2008), 491 -- 504, 査読有。

Takashi Tsuboi: On the uniform
perfectness of diffeomorphism groups,
Advanced Studies in Pure Math. 52,
Groups of Diffeomorphisms (2008),
505 -- 524, 査読有。

Tomoo Yokoyama and Takashi Tsuboi:
Codimension one minimal foliations and
the fundamental groups of leaves, Annale
de l'Institut Fourier 58 (2008), 723 -- 731,
査読有。

Takashi Tsuboi: On the group of real
analytic diffeomorphisms, Annales
Scientifiques de l'Ecole Normale
Supérieure, 49, (2009), 601--651, 査読有。

Takashi Tsuboi: Classifying spaces for
groupoid structures, Foliations, Geometry,
and Topology: Paul Schweitzer Festschrift,
Contemporary Mathematics 498 (2009)
67 -- 81, 査読有。

Andrzej Bis, Hiromichi Nakayama and
Pawel Walczak: Modelling minimal foliated
spaces with positive entropy,
Hokkaido Math. J. 36 (2007), 283 -- 310,
査読有。

Hiromichi Nakayama: Fiberwise divergent
orbits of projective flows with exactly two
minimal sets. Pacific J. Math. 229 (2007),
469 -- 483, 査読有。

Soichiro Asami and Ken'ichi Kuga:
Colorings of torus knots and their twist-
spuns by Alexander quandles over finite
fields. J. Knot Theory Ramifications 18
(2009), 1259 -- 1270, 査読有。

Ken-ichi Sugiyama, On geometric
analogues of the Iwasawa main conjecture

for a hyperbolic threefold, Adv. Stud. in
Pure Math.55 (2009), 117 -- 136, 査読有。

Ken-ichi Sugiyama, On geometric
analogues of the Birch and Swinnerton-
Dyer conjecture for low dimensional
hyperbolic manifolds, Contemporary Math.
484 (2009), 267 -- 286, 査読有。

Ken-ichi Sugiyama, On geometric Iwasawa
conjecture from a view point of the
arithmetic topology, RIMS Kokyuroku
Bessatsu 4 (2007), 235 -- 247, 査読有。

Ken-ichi Sugiyama, An analogu of the
Iwasawa conjecture for a complete
hyperbolic threefold, J. Reine Angew.
Math. 613 (2007), 35 -- 50, 査読有。

[学会発表] (計 2 件)

Takashi Tsuboi: On the group of real
analytic diffeomorphisms, Foliations,
Topology and Geometry in Rio, PUC-Rio,
Brazil, 2007 年 8 月 10 日.

Hiromichi Nakayama: Infinitesimal
behavior of 2-dimensional dynamical
systems, the Fourth International
Conference of Applied Mathematics and
Computing, Plovdiv, Bulgaria,
2007 年 8 月 14 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

稲葉 尚志 (INABA TAKASHI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 40125901

(2) 研究分担者

坪井 俊 (TSUBOI TAKASHI)
東京大学・大学院数理学研究科・教授
研究者番号 : 40114566
中山 裕道 (NAKAYAMA HIROMICHI)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号 : 30227970
久我 健一 (KUGA KEN'ICHI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 30186374
杉山 健一 (SUGIYAMA KEN-ICHI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 90206441

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

(海外共同研究者)

PAWEL WALCZAK
LODZ 大学 · 数学部 · 教授
POLAND