

平成22年3月23日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540068
 研究課題名 (和文) モース理論に関連した位相幾何学の研究と数式処理の研究

研究課題名 (英文) RESEARCH OF TOPOLOGY RELATED THE MORSE THEORY AND
 RESEARCH OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEM

研究代表者
 山口 耕平 (YAMAGUCHI KOHHEI)
 電気通信大学・電気通信学部・教授
 研究者番号：00175655

研究成果の概要 (和文)：一般に、写像空間は無限次元位相空間であり、その空間の位相的性質を研究するのは難しい。本研究では、無限次元モース理論の原理を利用して、特に空間 X, Y が実代数的多様体 (実数係数の多変数多項式の零点集合で表現される特異点のない空間) の間の写像空間のホモトピー型を研究した。とくに、空間 Y がグラスマン多様体で、空間 X が、その上のベクトル束がある条件を満足するとき、写像空間 $\text{Map}(X, Y)$ をその間の代数的写像のなす部分空間 $\text{Alg}(X, Y)$ でホモトピー的に近似できるという結果を証明できた。このことにより、Gromov のホモトピー原理が成り立つことを証明できた。さらに、空間 X, Y が実射影空間の場合にその有限次元近似の次元を多項式の次数と関連した公式で表すこと (Atiyah-Jones 型定理) にも成功した。

研究成果の概要 (英文)：In general, the spaces of mappings from a topological space X into Y are infinite dimensional spaces and it seems very difficult to study the topology of them.

So in our research we restrict the case that X and Y are real algebraic varieties, and we try to investigate the topology of the mapping space $\text{Map}(X, Y)$. In particular, when Y is a Grassmanian manifold and the space X satisfies some assumptions concerning the vector bundles over X , we can show that the subspace $\text{Alg}(X, Y)$ consisting of algebraic maps between them and $\text{Map}(X, Y)$ are of the same homotopy type. Moreover, if X and Y are real projective spaces, we can compute the homotopy (or homology) approximating dimension explicitly. This shows that Gromov's h -principle holds for this case, and we also prove that

Atiyah-Jones type Theorem holds for these cases.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学、モース理論、代数幾何学、ホモトピー型、実代数幾何学、数式処理

1. 研究開始当初の背景

2007 年度以前に、すでに我々は、M. Guest 氏 (首都大学東京・教授) と A. Kozłowski 氏 (Warsaw University) との共同研究によって、1 変数有理関数の空間の位相に関連して、写像空間 $\text{Map}(X, Y)$ で空間 X の次元が実 1 次元または複素 1 次元の場合に、さまざまな空間に対して、その関連したラベル付き配置空間 (labeled configuration space) について研究していてそれらについては、Atiyah-Jones 型定理が成り立つことを証明していた。その後、Atiyah-Jones 型定理が、空間 X の次元が 2 以上についても空間 Y が十分対称性がある良い空間であれば成り立つのではと予想していた。そのとき、2006 年に Mostovoy が複素射影空間の間に正則写像の空間に対して、Atiyah-Jones 型定理が成り立つことを証明した。ところが、その結果を吟味するうちにさまざまな間違いがあることがわかってきた。しかし、その結果自体はいろいろは別の計算から正しいのではと予測されその修正をどうすればよいかを考えていた。

2. 研究の目的

本研究では、無限次元写像空間 $\text{Map}(X, Y)$ のホモトピー型を研究することを第 1 の目的とする。一般の場合を考えるのは難しいので、応用上有効な、空間 X と Y が実代数的多様体の場合に、 $\text{Map}(X, Y)$ を近似するより小さな X から Y への代数的写像 (regular map) のなす部分空間 $\text{Alg}(X, Y)$ でどこまで近似できるかを考えたい。Morse 理論的原理によれば、空間 X, Y が十分対称性があれば、この原理によってホモトピー的には同じであると予測される。このことを、実代数幾何学の力を使って正しいかを調べるのが目的である。

3. 研究の方法

本研究の主要部分は、代数的位相幾何学に属するものである。実代数的多様体 X から実代数的多様体 Y への連続写像全体のなす空間 $\text{Map}(X, Y)$ を X から Y への (多項式達で表現される) 代数的写像全体のなす $\text{Map}(X, Y)$ の部分空間 $\text{Alg}(X, Y)$ のホモトピー型を研究するには位相幾何学だけではなく代数幾何学や解析学の手助けがかかせない。具体的な研究方法は以下である。

(1) 各分担者の専門知識の援助のもとで上記研究を遂行する。

(2) 最近の共同研究者 A. Kozłowski 氏とはかれが日本を去る 2010 年夏までは毎週のセミナーと電子メールによる研究連絡

を通して研究を遂行する。

(3) 各研究分担者は、それぞれの分野の研究集会に多く参加し研究情報の収集にあたった。

(4) さらに、数式処理ソフト「Mathematica」を利用したシミュレーションを実施する。このことに対しては共同建久者 A. Kozłowski 氏には多大なアドバイスをもらいながら実施した。

4. 研究成果

(1) 実代数的ベクトル束上のストーン・ワイエルシュトラス型定理を利用して、以下の結果を証明することに成功した：

実代数的なコンパクト affine variety X に対して X 上の任意な k -次元位相ベクトル束がある代数的ベクトル束に同型となるとき、 X から、 n 次元線形空間の中の k 次元部分空間のなすグラスマン多様体 $\text{Gr}(n, k)$ への代数的写像全体のなす部分空間を $\text{Alg}=\text{Alg}(X, \text{Gr}(n, k))$ とするとき、 Alg から連続写像全体のなす空間 $\text{Map}(X, \text{Gr}(n, k))$ への包含写像はホモトピー同値写像である。

(2) (1) の結果から $\text{Map}(X, \text{Gr}(n, k))$ のホモトピー型の研究は $\text{Alg}(X, \text{Gr}(n, k))$ のホモトピー型の研究に帰着する。代数的写像全体のなす空間 $\text{Alg}(X, \text{Gr}(n, k))$ には多項式の次数によって自然な filtration がはいる。この filtration に関して、 $k=1$ のときには、Atiyah-Jones-Segal 型の結果が成り立つことを証明することができた。

(3) Dern 手術で結び目 (knot) からレンズ空間が生じる例外的現象「レンズ手術」を特異点論の観点から研究した。とくに、特異点論から生まれた A' Campo 氏による divide 理論の観点から結び目理論を研究し、これに関して論文を発表した。とくに、その中では、すべてのレンズ手術の結び目が divide 表示できるかどうかを詳細に調べることができた。

(4) 時間変数係数の高階線形双曲型方程式に対する初期値問題の一位可解性に関して、係数が有限次退化、無限次退化を含むような荷重関数のクラスを導入した。とくに、有限次退化の場合の既存の結果をそのクラスに一般化することができた。

(5) 時空間変数の 2 階半線形双曲型方程式に対する初期値境界値問題の解の振動性について、振動解と正值解になる条件をそれぞれ与えた。とくに、空間が 3 次元のときには斉次ディリクレ条件下での球対称解と、空間 1 次元では斉次ノイマン条件下での解が各点振動するための条件を示した。

(6) 変数係数の線形常微分方程式系の解の漸近挙動に関して、非斉次方程式系の解に対する新規の評価式を導き、高次の特性数の概念を定義していくつかの新しい評価式を得た。とくに、有界係数の非斉次方程式系の解が多項式位数 n なるための新しい条件を見つけた。

(7) A. Kuznetsov の Homological 射影的 双対に関する研究に関連して、derived category の研究を行った。とくに、D. Happel, I. Reiten, S. O. Smalø の tilting in Abelian category and Quasitilted algebra のある結果の別証明を与えることができた。

(8) (2) の研究に関連して、 $1 < m < n$ のときの m 次元実射影空間から n 次元実射影空間への連続写像全体となる写像空間のホモトピー型、とりわけその有理ホモトピー型を研究してそのホモトピー群を具体的に計算することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

- (1) A. Kozłowski and K. Yamaguchi, Spaces of algebraic maps from real projective spaces into complex projective spaces, (to appear) Contemporary Math., 査読有
- (2) M. Adamaszek, A. Kozłowski and K. Yamaguchi, Spaces of algebraic and continuous maps between real algebraic varieties, (to appear) Quart. J. Math. 査読有
- (3) P. H. Anh Ngoc, S. Murakami, T. Naito, J. Son Shin and Y. Nagabuchi, On positive linear Volterra-Stieltjes differential systems, Integral Equations Operator Theory, 査読有, vol. 64, 325-335 (2009)
- (4) P. H. Anh Ngoc, T. Naito, J. Son Shin and S. Murakami, Stability and robust stability of positive linear Volterra difference equations, Internat. J. Robust Nonlinear Control, 査読有, vol. 19, 552-568 (2009)
- (5) M. Kida, G. Renault and K. Yokoyama, Quintic polynomials of Hashimoto-Tsunogai Brumer and Kummer, Int. J. Number Theory, 査読有, vol. 5, 555-571 (2009)
- (6) H. Ishida, Levi conditions to the Gevrey well-posedness for hyperbolic operators of higher order, J. Math. Kyoto Univ., 査読有, vol. 49, 173-191 (2009)
- (7) H. Ishida and Y. Yuzawa, Oscillatory properties for semilinear degenerate hyperbolic equations of second

order, J. Math. Anal. Appl., 査読有, vol. 356, 624-632 (2009)

(8) M. Morimoto and Y. Yamada, A note on essential tori in the exterior of torus knots with twists, Kobe Math. J., 査読有, vol. 26, 29-34 (2009)

(9) Y. Yamada, Lens space surgeries as A' Campo's divide knots, Algebr. Geom. Topol., 査読有, vol. 9, 397-428 (2009)

(10) K. Yamaguchi, Spaces of maps from the closed Riemann surface into the 2-sphere, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, vol. 1670, 77-83 (2009)

(11) K. Yamaguchi, Simplicial resolutions and their applications, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, vol. 1612, 170-180 (2008)

(12) T. Naito, P. Huu Anh Ngoc and J. Son Shin, Lyapunov exponents of solutions to linear differential equations with periodic forcing functions, J. Math. Anal. Appl., 査読有, vol. 342, 349-353 (2008)

(13) T. Naito, P. Huu Anh Ngoc and J. Son Shin, Representations and asymptotic behavior of solutions to periodic linear difference equations, Funkcial Ekvac., 査読有, vol. 51, 55-80 (2008)

(14) T. Naito, P. Huu Anh Ngoc and J. Son Shin, Floquet representations and asymptotic behavior of solutions to periodic linear difference equations, Hiroshima Math. J., 査読有, vol. 38, 135-154 (2008)

(15) P. Huu Anh Ngoc, T. Naito, J. Son Shin and S. Murakami, On stability and robust stability of positive linear Volterra equations, J. Control Optim., 査読有, vol. 47, 975-996 (2008)

(16) K. Yamaguchi, Resultants and universal coverings, J. Math. Kyoto Univ., 査読有, vol. 47, 859-873 (2007)

(17) K. Yamaguchi, The homotopy approximation of spaces of algebraic maps between algebraic varieties, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, vol. 1569, 123-131 (2007)

(18) T. Kadokami and Y. Yamada, A deformation of the Alexander polynomials of knots yielding lens spaces, Bull. Austral. Math. Soc., 査読有, vol. 75, 75-89 (2007)

(19) P. Huu Anh Ngoc, T. Naito and J. Son Shin, On stability of a class of positive linear functional difference equations, Math. Control Signals Systems, 査読有, vol. 19, 361-382 (2007)

(20) T. Naito, J. Son Shin, S. Murakami and P. Huu Anh Ngoc, Characterizations of

linear Volterra integral equations with negative kernels, J. Math. Anal. Appl., 査読有, vol. 335, 298-313 (2007)

(21) P. Huu Anh Ngoc, T. Naito and J. Son Shin, Characterization of positive linear functional differential equations, Funkcial Ekvac., 査読有, vol. 50, 1-17 (2007)

(22) T. Naito, S. Murakami, J. Son Shin and P. Huu Anh Ngoc, Characterization of positive linear Volterra integro-differential systems, Integral Equations Operator Theory, 査読有, vol. 58, 255-272 (2007)

(23) P. Huu Anh Ngoc, N. V. Minh and T. Naito, Stability radii of positive linear functional differential systems in Banach spaces, Int. J. Evol. Equ., 査読有, vol. 2, 75-07 (2007)

(24) P. Huu Anh Ngoc, Thai Bao Tran and T. Naito, Stability radii of higher order linear difference systems under multi-perturbations, J. Differentail Equ. Appl., 査読有, vol. 13, 15-24 (2007)

(25) P. Huu Anh Ngoc and T. Naito, Stability radius of linear parameter-varying systems and applications, J. Math. Anal. Appl., 査読有, vol. 328, 170-191 (2007)

[学会発表] (計 26 件)

(1) M. Adamaszek, A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of algebraic maps I, 日本数学会年会トポロジー分科会講演アブストラクト, (慶応大学日吉キャンパス) (2010. 3. 25)

(2) M. Adamaszek, A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of Algebraic maps II, 日本数学会年会トポロジー分科会講演アブストラクト, (慶応大学日吉キャンパス) (2010. 3. 25)

(3) 門上晃久, 山田裕一, Lens space surgeries along certain 2-components links and Reidemeister-Turaev torsion, 日本数学会年会トポロジー分科会講演アブストラクト, (慶応大学日吉キャンパス) (2010. 3. 26)

(4) 山田裕一, Every Berge's knot of lens space surgery is a divide knot, The sixth East Asian School of Knots and related topics, 天津 (中国) (2010. 1. 28)

(5) 石田晴久, 退化双曲型方程式に対する振動定理について, 第 2 5 回松山キャンプ, (愛媛県総合社会福祉会館) (2010. 1. 6)

(6) 石田晴久, 退化双曲型方程式の振動定理と非振動解について, 第 1 6 回超局所解析と古典解析, (休暇村竹野会館)

(2009. 11. 2)

(7) 石田晴久, 退化双曲型方程式の振動問題について, 八王子偏微分方程式研究集会, (八王子セミナーハウス) (2009. 10. 11)

(8) 石田晴久, 退化双曲型方程式の振動問題について, 日本数学会 2009年度秋季総合会 函数方程式論分科会講演アブストラクト, (大阪大学理学部) (2009. 9. 24)

(9) 石田晴久, Asymptotics for linear differential systems with variable coefficients via new characteristic numbers, 第 2 4 回 松山キャンプ, (山口大学理学部) (2009. 3. 15)

(10) 石田晴久, 新しい特性数による変数係数線形微分方程式系の解の挙動について, 日本大学理工学部偏微分方程式研究集会, (日本大学理工学部) (2009. 3. 4)

(11) 山田裕一, フリードマン原論文に学ぶ 6 章, 8 章, キャッソン・フリードマン理論研究会, (けいはんなプラザホテル) (2009. 10. 19)

(12) 山田裕一, 4次元多様体を表す Kirby Diagram, 基礎から応用, (筑波大学) (2009. 10. 1)

(13) 山田裕一, Dehn surgery along A'Campo's divide knots, Lens spaces and plane curves, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics, (広島大学) (2009. 3. 9)

(14) Y. Yamada, Lens space surgery along A'Campo's divide knots II, The 5th East Asian School of Knots and Related Topics, (慶州 (韓国)), (2009. 1. 12)

(15) 山口耕平, The space of curves on the 2-sphere, 研究集会「変換群の新たな展開」(京都大学数理解析研究所), (2009. 8. 19)

(16) 石田晴久, 特性数による変数係数線形常微分方程式系の解の漸近挙動について,

第15回超局所解析と古典解析, (横浜港のホテル) (2008. 11. 9)

(17) 石田晴久, 多項式位数の解をもつ線形常微分方程式系の性質について, 米子偏微分方程式研究集会, (米子工業高等専門学校) (2008. 10. 12)

(18) 石田晴久, Levi conditions for higher order hyperbolic equations by weight functions, 日本数学会 2008年度年会函数方程式論分科会講演アブストラクト, (近畿大学理工学部) (2008. 3. 23)

(19) 石田晴久, Colombini-Tagliatela 型の Levi 条件の改良への試み, 第23回 松山キャンプ, (山口大学理学部) (2008. 1. 6)

(20) 山田裕一, Generalized rational blow-down, torus knots, and Euclidean Algorithm, 日本数学会秋季総合分科会講演アブストラクト, (東京工業大学), (2008. 9. 25)

(21) 山田裕一, Torus knots, Generalized rational blow-down, and lens space surgery of Type 7, 8, 研究集会「4次元トポロジー」, (広島大学) (2008. 2. 8)

(22) 石田晴久, Oscillatory properties for semilinear degenerate hyperbolic equations I, 山中湖偏微分方程式シンポジウム, (東海大学山中湖セミナーハウス) (2007. 10. 8)

(23) 石田晴久, Oscillatory properties for semilinear degenerate hyperbolic equations, 2007年夏の偏微分方程式シンポジウム, (ホテル箱根パウエル) (2007. 8. 28)

(24) 山田裕一, Generalized rational blow-down and Euclidean Algorithm, 研究集会「低次元幾何学 と 無限次元幾何学」 (東京大学玉原国際セミナーハウス), (2007. 9. 13)

(25) 山田裕一, Kirby Calc. 入門,

研究集会「低次元幾何学 と 無限次元幾何学」, (東京大学玉原国際セミナーハウス) (2007. 9. 12)

(26) 山田裕一, 多様体の中で具体的にキャッソンハンドルを“作る”(Z. Bizaca と R. Gompf の結果紹介), 「キャッソンハンドル勉強会」, (東京大学玉原国際セミナーハウス) (2007. 5. 27)

[その他]
ホームページ等

<http://kjk.office.uec.ac.jp/Profiles/0001/0000339/profile.html>

http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/PS_cache/arxiv/pdf/0812/0812.3954v2.pdf

http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/PS_cache/arxiv/pdf/0809/0809.4893v3.pdf

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山口 耕平 (YAMAGUCHI KOHHEI)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号: 00175655

(2) 研究分担者

内藤 敏機 (NAITO TOSHIKI)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号: 60004446

木田 雅成 (KIDA MASANARI)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号: 20272057

大野 真裕 (OHNO MASAHIRO)
電気通信大学・電気通信学部・准教授
研究者番号: 70277820

山田 裕一 (YAMADA YUICHI)
電気通信大学・電気通信学部・准教授
研究者番号: 30303019

石田 晴久 (ISHIDA HARUHISA)
電気通信大学・電気通信学部・准教授
研究者番号: 80312792

(3) 連携研究者

なし