

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007年度～2008年度

課題番号：19540070

研究課題名（和文） 複素空間型内の実超曲面の研究

研究課題名（英文） Study of real hypersurfaces in complex space forms

研究代表者

永井節夫(NAGAI SETSUO)

富山大学・大学院理工学研究部・准教授

研究者番号：50316791

研究成果の概要：

複素空間型内の実超曲面のリッチテンソル，構造ヤコビ作用素，構造テンソル場が等質実超曲面，特に(A)型の等質実超曲面をどのように特徴付けるかという点に関して研究し一定の成果を得た．具体的には，構造ヤコビ作用素と構造テンソル場が可換であるものは(A)型の等質実超曲面とある種のホップ実超曲面を特徴づけることを複素空間型の次元が2，3の場合も含めて証明した．また挟撃問題に関しても，(B)型の等質実超曲面を個別に特徴づける定理に対する新しい知見が得られ，極小ではない場合も含めて研究に進展があったと考えている．(A)型の等質実超曲面のスカラー曲率に対する挟撃問題については，極小の場合に Lawson が第2基本形式の長さの平方が $c/2(n-1)$ 以下ならば(A)型の等質実超曲面であることを証明した．極小の場合等質実超曲面に対しては，(A)型の実超曲面と(B)型の実超曲面とは第2基本形式の長さの平方は異なる値を取り，(B)型から(E)型までは全て同じ値を取る．したがって第2基本形式の長さのみでは(B)から(E)型までを区別することは出来ない．ところが，構造ベクトル場方向の主曲率に着目すると，それらは(B)，(C)，(D)，(E)型で全て異なる値を取ることが分かる．そこで，我々は複素空間型内の実超曲面における Simons type の公式を用いて，第2基本形式の長さの平方が $c/2(3n-1)$ 以下で構造ベクトル場方向の主曲率の平方が $(n-1)c$ 以上である極小実超曲面は(B)型であることを証明した．実超曲面が必ずしも極小でない場合に関しては，コンパクトで向き付け可能な時に奥村正文氏による挟撃定理がある．奥村氏は矢野の積分公式を用いてこれを証明した．我々は，実超曲面における Simons type の公式と，発散定理を用いることによってその別証明を見出し，さらにその手法を用いて(B)型の実超曲面の特徴付けを与える奇，Kim，中川氏の定理の別証明を見出すと共に，その挟撃数の意味を見出した．

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

1. 研究開始当初の背景

複素射影空間内の実超曲面については、奥村正文氏によるその形作用素 A と構造テンソル ϕ に対して $A\phi = \phi A$ を満たすものの分類が先駆的研究である。これは (A) 型の実超曲面の特徴づけを与える。現在この方面でもっとも興味深い未解決問題はリッチテンソル S に対して $S\phi = \phi S$ を満たす実超曲面の分類問題である。前者の問題と本問題の違いは前者が外在的不変量である形作用素 A の絡む条件による問題であるのに対して、後者は実超曲面の内在的不変量であるリッチテンソル S と構造テンソル ϕ との可換性を満たす実超曲面を調べるといふ点にある。前者においては実超曲面の構造ベクトル場 ξ の主曲率性は直ちに得られるのに対して、後者の場合には構造ベクトル場の主曲率性は不明である。複素射影空間内の等質実超曲面に限ると、条件 $S\phi = \phi S$ と条件 $\nabla_{\xi} S = 0$ とは同値であることが知られている。しかしながら ξ が主曲率ベクトル場ではない場合については非平坦複素空間型内において $S\phi = \phi S$ を満たすものの存在、非存在ともに不明である。研究代表者は平成 15 年 12 月に韓国の慶北大学を訪れた際に当大学の奇宇恒氏と知己を得た。氏はこの方面の研究の第一人者である。以来奇氏と共同研究を続けている。奇氏らは実超曲面上のリッチテンソルと構造テンソルに関連した一連の研究を行い、以下の様な研究成果を挙げている。

- ① $\nabla_{\eta} S = 0$, $S\xi = \sigma\xi$, $\sigma = \text{定数}$ ならば ξ は主曲率ベクトルである。
- ② $R_{\xi} S = SR_{\xi}$, $\nabla_{\xi} S = 0$, 平均曲率一定ならば ξ は主曲率ベクトルである。
- ③ $R_{\xi} S = SR_{\xi}$, $\nabla_{\eta} S = 0$, $g(S\xi, \xi) = \text{一定}$ ならば ξ は主曲率ベクトルである。
- ④ $R_{\xi} A = AR_{\xi}$, $\nabla_{\eta} S = 0$, かつ平均曲率一定ならば ξ は主曲率ベクトルである。
- ⑤ $\nabla_{\xi} S = 0$, $R_{\xi} A = AR_{\xi}$ ならば ξ は主曲率ベクトルであり分類できる。

部分多様体の剛性問題とは、部分多様体の埋め込みが外側の空間の合同変換を除いて一意であるかどうかというものである。複素射影空間内の実超曲面については高木亮

一氏らの一連の研究によって、外側の複素射影空間の複素次元が 4 以上の場合には剛性があることが証明されている。また、複素双曲空間内の実超曲面については、外側の複素次元が 3 以上で、タイプナンバー (形作用素の階数) が 2 でない等質なものに対しては剛性があることが高木亮一氏によって証明されている。

2. 研究の目的

複素空間型内の実超曲面のリッチテンソル、構造ヤコビ作用素、構造テンソルによる研究、実超曲面の剛性問題、スカラー曲率に対する挾撃問題の研究を目的とする。種々の等質実超曲面がリッチテンソル、構造ヤコビ作用素、構造テンソルによりどのように特徴付けられるか、複素空間型の次元が 2, 3 の場合も含めて剛性があるかどうか、極小で無い場合も含めて等質実超曲面の (A) 型から (E) 型のそれぞれのタイプのスカラー曲率による挾撃問題を研究する。

複素射影空間内の実超曲面については、奥村正文氏によるその形作用素 A と構造テンソル ϕ に対して $A\phi = \phi A$ を満たすものの分類が先駆的研究である。これは (A) 型の実超曲面の特徴づけを与える。この条件からは構造ベクトル場の主曲率性が直ちに得られる。現在この方面でもっとも興味深い未解決問題はリッチテンソル S に対して $S\phi = \phi S$ を満たす実超曲面の分類問題である。この条件は内在的な条件であり、また構造ベクトル場の主曲率性については不明である。複素射影空間内の等質実超曲面に限ると、 ξ を構造ベクトル場としたとき、条件 $S\phi = \phi S$ と条件 $\nabla_{\xi} S = 0$ とは同値であることが知られている。また ξ が主曲率方向という条件の下では前田定廣氏による分類定理がある。この条件に関する奇氏、Chunji Li 氏との共同研究において、条件 $R_{\xi} A = AR_{\xi}$ の下で $\nabla_{\xi} S = 0$ ならば構造ベクトル場が主曲率方向であることが得られている。しかしながら ξ が主曲率方向ではない場合については非平坦複素空間型内において $S\phi = \phi S$ をみたすものの存在、非存在も不明である。この条件をみたす実超曲面に関しては 2 つの可能性が有ることになる。ひとつは構造ベクトル場は必ず主曲率方向であるという可能性、もうひとつは構造ベクトル場が主曲率方向ではない非等質な例が存在するという可能性である。いずれにしてもこの問題は大変興味深く、意義のある問題であると考えている。

我々が目標とするのはこの問題の解決である。

複素射影空間内の実超曲面に対する剛性問題については高木亮一氏らの一連の研究によって、外側の複素射影空間の複素次元が4以上の場合には剛性があることが証明されている。また、複素双曲空間内の実超曲面については、外側の複素次元が3以上で、タイプナンバー（形作用素の階数）が2でない等質なものに対しては剛性があることが高木亮一氏によって証明された。そこで我々は次の事を研究の目標にしようとする。まず1つ目は複素次元が3以下の複素射影空間内の実超曲面の剛性問題。2つ目は複素双曲空間内の実超曲面でタイプナンバーが2であるものに対する剛性問題である。複素双曲空間内の実超曲面の場合には、J. Berndt らによって構造ベクトル場 ξ が主方向ではない等質なものの具体例が得られており、しかもその中にタイプナンバーが2であるものが存在することが分かっている。つまり等質実超曲面に限っても、複素射影空間の場合と複素双曲空間の場合では様相がかなり違っており、剛性問題は大変興味深いものと考えられる。

3. 研究の方法

研究方法としては、韓国の共同研究者である奇宇恒氏、研究分担者の高木亮一氏および中国の共同研究者であるChunji Li氏、Huili Liu氏との共同研究を中心として研究を推進していく。また、学内の関連研究者の協力も積極的に仰ぐ。関連文献の徹底的調査、関連する国内外の研究者との研究交流、各種研究会、学会への参加による情報収集を行う。年度内に得られた成果については論文として発表し、学会、シンポジウム他研究集会において口頭発表を行い関連研究者と知識のフィードバックを行う。我々の研究は幾何学のみならず代数学、解析学、コンピューターを含む応用数学など幅広い領域の方法を必要としている。幸い代表者の属する富山大学数学教室には、それぞれの分野の専門家が所属しているので、これらの方々の協力を積極的に仰ぎながら研究を推進する。

4. 研究成果

複素空間型内の実超曲面について、そのリッチテンソル、構造ヤコビ作用素、構造ベクトル場、構造テンソル場を用いた研究、および剛性問題、スカラー曲率による挾撃問題を中心に研究を行ってきた。構造ヤコビ作用素とリッチテンソルに関連する結果として、構造ヤコビ作用素とリッチテンソルが可換

で、構造ヤコビ作用素と構造テンソル場が可換であるものは(A)型の等質実超曲面とある種のホップ実超曲面を特徴づけることを証明した。スカラー曲率一定の条件のもとではすでに証明済みであった。その結果を論文U-Hang Ki, Setsuo Nagai and Ryoichi Takagi, Structure Jacobi operator of real hypersurfaces with constant scalar curvature in a nonflat complex space form, Tokyo J. Math. Vol. 30 (2007), 441-454 として出版した。さらにスカラー曲率の条件を外せることを複素空間型の次元が2, 3の場合も含めて証明を完成し、その結果を論文U-H. Ki, S. Nagai and R. Takagi, The Structure vector field and structure Jacobi operator of real hypersurfaces in nonflat complex space forms, preprint として纏め学術雑誌に投稿し、現在査読中である。また、U-Hang Ki氏、栗原博之氏、高木亮一氏との共同研究によって、構造ヤコビ作用素とリッチテンソルが可換で、構造ヤコビ作用素が構造ベクトル場方向に平行であるものは(A)型の等質実超曲面であることを証明し、その結果を論文U-H. Ki, H. Kurihara, S. Nagai and R. Takagi, Characterizations of real hypersurfaces of type A in a complex space form in terms of the structure Jacobi operator, preprint として纏め学術雑誌に投稿し、現在査読中である。また、構造ヤコビ作用素がリッチテンソルと可換で、リッチテンソルが $\phi \nabla_{\xi} \xi$ 方向に平行ならばホップ実超曲面であることを証明し、その結果を論文U-H. Ki and S. Nagai, The Ricci tensor and structure Jacobi operator of real hypersurfaces in a complex projective space として纏め、Journal of Geometry に掲載予定である。

挾撃問題に関しては、(B)型の等質実超曲面を個別に特徴づける定理に対する新しい知見が得られ、極小ではない場合も含めて研究に進展があった。(A)型の等質実超曲面のスカラー曲率に対する挾撃問題については、極小の場合に Lowson が第2基本形式の長さの平方が $c/2(n-1)$ 以下ならば(A)型の等質実超曲面であることを証明した。極小の場合等質実超曲面に対しては、(A)型の実超曲面と(B)型の実超曲面とは第2基本形式の長さの平方は異なる値を取り、(B)型から(E)型までは全て同じ値を取る。したがって第2基本形式の長さのみでは(B)から(E)型までを区別することは出来ない。ところが、構造ベクトル場方向の主曲率に着目すると、それらは(B), (C), (D), (E)型で全て異なる

値を取ることが分かる．そこで，我々は複素空間型内の実超曲面における Simons type の公式を用いて，第 2 基本形式の長さの平方が $c/2(3n-1)$ 以下で構造ベクトル場方向の主曲率の平方が $(n-1)c$ 以上である極小実超曲面は (B) 型であることを証明した．実超曲面が必ずしも極小でない場合に関しては，コンパクトで向き付け可能な時に奥村正文氏による挟撃定理がある．奥村氏は矢野の積分公式を用いてこれを証明した．我々は，実超曲面における Simons type の公式と，発散定理を用いることによってその別証明を見出し，さらにその手法を用いて (B) 型の実超曲面の特徴付けを与える奇，Kim，中川氏の定理の別証明を見出すと共に，その挟撃数の意味を見出した．現在これらの成果を論文に纏めているところである．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

U-Hang Ki, Setsuo Nagai and Ryoichi Takagi, Structure Jacobi operator of real hypersurfaces with constant scalar curvature in a nonflat complex space form, Tokyo J. Math. Vol. 30(2007), 441-454. 査読有

U-Hang Ki and Setsuo Nagai, The Ricci tensor and structure Jacobi operator of real hypersurfaces in a complex projective space, to appear in Journal of Geometry. 査読有

[学会発表] (計 5 件)

- ① (単独) 永井節夫 複素空間型内の実超曲面について(2008年3月14日, 高木亮一教授退官記念研究集会「等質空間の不変構造と部分多様体」, 於千葉工業大学)
- ② (単独) 永井節夫 複素空間型内の実超曲面の構造ベクトル場の主曲率性について(2007年11月23日, 部分多様体論・湯沢2007, 於湯沢グランドホテル)
- ③ (単独) 永井節夫 Pinching problems of the scalar curvature of real hypersurfaces in a complex projective space(2007年10月25日, 数学特別講演会, 於韓国朝鮮大学)
- ④ (単独) 永井節夫 複素射影空間内の実超曲面における曲率の挟撃問題について(2007年8月6日, 第54回幾何学シンポジウム, 於鹿児島大学)
- ⑤ (単独) 永井節夫 複素射影空間内の実超曲面における曲率の挟撃問題について

(2007年7月28日, 松山善男先生還暦記念研究集会, 於中央大学理工学部)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永井節夫 (NAGAI SETSUO)

富山大学・大学院理工学研究部・准教授

研究者番号: 50316791

(2) 研究分担者 (2007年度)

高木亮一 (TAKAGI RYOICHI)

千葉大学・理学部・教授

研究者番号: 00015562

(3) 連携研究者 (2008年度)

高木亮一 (TAKAGI RYOICHI)

千葉大学名誉教授

研究者番号: 00015562