様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　４月１９日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2009
課題番号：19540071
研究課題名（和文）　HOMFLY と Kauffman 多項式による量子不変量の漸近挙動の研究

研究課題名（英文）A study of asymptotic behavior of HOMFLY and Kauffman polynomial

研究代表者
川越　謙一（KAWAGOE　KENICHI）
金沢大学・数物科学系・講師
研究者番号：50293337

研究成果の概要（和文）：近年、量子不変量の漸近挙動の研究が活発に行われている。そこでは Jones 多項式をはじめ量子群からくるような量子不変量が使われている。今回は Jones 多項式を拡張した２変数多項式 HOMFLY 多項式の漸近挙動に関する研究を行った。これまでの漸近挙動とは異なる現象、すなわち体積以外の値に収束する例を発見し、2 変数特有の現象を探ることに成功した。

研究成果の概要（英文）：In low dimensional topology, there is topics concerned with topological structure and geometric structure. Recent famous topic is the Volume Conjecture, which say that an asymptotic behavior of the N-colored Jones polynomial has a connection with the volume. We studied an extension of the Volume conjecture using the HOMFLY polynomial. We determined an symptotic behavior of the HOMFLY polynomial for some examples, and obtained values which are different from the volume.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：トポロジー，　結び目，　量子不変量

１．研究開始当初の背景

近年、結び目と３次元多様体の量子不変量から得られる幾何学的な量が注目される。きっかけは Kashaev（後に村上斉氏と村上順氏らによって定式化される）による「colored Jones 多項式の特殊値の漸近挙動から結び目の体積が出るであろう」という体積予想である。この予想は、８の字結び目などいくつかの具体例で体積予想が成立することが示され、体積以外にも Chern-Simons 不変量との関連も指摘された。村上斉氏と横田氏らは、８の字結び目の colored Jones 多項式 の漸近挙動を調べることで、背景に

Neumann-Zagier のポテンシャル函数が潜んでいること見出した。また colored Jones 多項式を利用して 3 次元多様体の量子不変量(Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量)が構成できるが、この漸近挙動も同様に体積や Chern-Simons 不変量と結びつくことも見出された。さらに樋上氏は Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量と Ramanujan の擬テータ函数との関連を指摘した。これらは全て８の字結び目やザイフェルト多様体などの具体的な例で検証であり、証明を含めた一般的な理論の構築はこれからである。また、上記の量子不変量は、量子不変量の中でも一番基本的な Jones 多項式が基になっている。

２．研究の目的

研究代表者の結果から、8 の字結び目において、量子群からくる HOMFLY 多項式の場合の漸近挙動は colored Jones 多項式の時と同じように体積と一致することが得られた。一方、量子群からこない時の HOMFLY 多項式、すなわち 2 変数の HOMFLY 多項式において、２つの変数を同時に動かした時の漸近挙動は体積以外の値をとりうることが分かった。但し、それがどのような幾何的な量と関連しているのかは現段階では不明である。

このことから体積予想を HOMFLY 多項式を用いて考察することは興味深いと考える。体積予想の研究は量子不変量の１つである Jones 多項式の漸近挙動に関する研究と同じである。１変数の Jones 多項式を２変数化したものには HOMFLY 多項式と Kauffman 多項式 の２つがあるので HOMFLY 多項式及び Kauffman 多項式の立場から量子不変量の漸近挙動を多角的に調べることを目標とした。

最初は q が１の冪根となるような特殊値で様々な結び目の漸近挙動を扱いたい。これは体積予想の HOMFLY 多項式による類似である。次に、q が一般の変数の場合の８の字結び目の計算を考えたい。これは colored Jones 多項式では Neumann-Zagier のポテンシャル函数が導かれたことに対する HOMFLY 多項式での類似であり、どのような函数が出てくるのか興味深いと考えた。

３．研究の方法

量子不変量の漸近挙動を具体的な例を用いて調べるために、基本となる
(1)幾重にも交差(ツイスト)した紐に関する値を決定すること
(2)ツイストを含む具体的な結び目の量子不変量の漸近挙動を調べること
を目標に研究を行った。この時、多数の q 整数の和を積で表示する恒等式を証明する必要がある。これには計算機を用いて具体例を計算し，恒等式の予想を立てる．成り立つべき恒等が予想できれば，その証明は今までの計算結果の蓄積があるので、難しくない。

上の等式を利用して不変量を求める。その不変量の積文表示が決定できれば決定する。もし決定することが困難な場合は、計算機を用いて漸近挙動を調べる。HOMFLY 多項式の場合の計算が得られれば、次は Kauffman 多項式の場合に取り掛かる。Kauffman 多項式の場合は HOMFLY 多項式の時と異なり，計算量が多大となる．これは HOMFLY 多項式は本質的に 3 項間の漸化式の計算に帰着するのに対し，Kauffman 多項式の場合は 4 項間の漸化式の計算に帰着するからである。以上のことが終われば、幾つかの例を用いて漸近挙動を調べる。特に HOMFLY の場合は体積以外の値に収束する場合があることが分かっているので、どの値に収束するのか、またどれくらいの速度で収束するかを具体的に調べる。

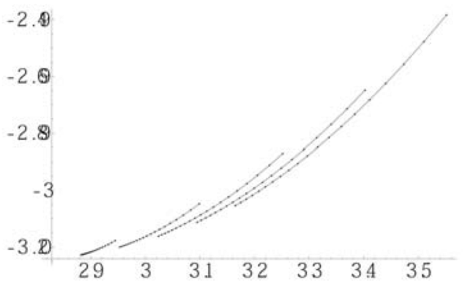
４．研究成果

colored Jones 多項式の特殊値の極限がその結び目の捕空間の体積と一致するであろうという体積予想はいくつかの例で検証されているが、現在も証明されてはいない。多数の数学者によって体積予想の拡張も提唱されている。すなわち、結び目の漸近挙動と体積と Chern-Simons不変量との関係、３次元多様体の量子不変量の漸近挙動と体積との関係などがある。ここで利用される不変量は全て量子群からくる１変数多項式のJones多項式である。そこで、本研究では体積予想を多角的かつ広域的に考察するために、１変数多項式不変量である Jones 多項式を２変数へと拡張した HOMFLY多項式と Kauffman 多項式を用いた。それによって幅広い観点から体積予想を検証することを目標とした。最初は具体例を計算結果がある程度得られている HOMFLY 多項式に関した計算を行った。８の字結び目に対しては具体的な値が積分表示が得られているので、今後の計算に必要なq整数に関するいくつかの等式を証明した。これらの等式を

利用して、８の字結び目以外の 交点数の少ない結び目(5_2結び目と6_1結び目)やホワイトヘッド絡み目に対して計算を行った。これらは積分表示がすぐに求めることができなかったので計算機による具体的な数値計算を行った。８の字結び目の具体的な値から予想をたて、同様な漸近挙動が起きているのかを調べた。

最初は２つのパラメータを同時に動かさない場合、すなわち１変数化のHOMFLY多項式の値を計算した。８の字結び目の時は、体積に収束していったが、5_2結び目と6_1結び目とホワイトヘッド絡み目も同様に体積に収束していくことが分かった。

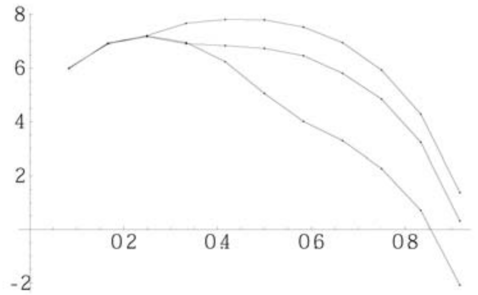
次の図は5_2結び目の漸近挙動の図である。原点は5_2結び目の体積とChern-Simons不変量の値の組を表す。漸近挙動の程度を示すパラメーターは80,85,…,175である。折れ線グラフは1変数化した時のHOMFLY多項式を表している。一番左端はJones多項式に対応し、sl_2の量子群に付随したHOMFLY多項式である。右にいくにつれてsl_3,sl_4,sl_5に付随したHOMFLY多項式である。



これから分かることは、全て体積とChern-Simons不変量に収束していく様子がみてとれる。sl_nのnが大きくなるほど収束速度が遅くなることもみてとれる。また、既に量子群とは関係ないが、sl_n のnを２より小さい数にもすることができ、その場合はJones多項式より速い速度で収束する。

次に２つのパラメータをある比率（0以上1未満）を保ちつつ同時に動かした。８の字結び目の場合は体積以外の値が出たが、5_2結び目と6_1結び目とホワイトヘッド絡み目も同様に体積以外の値に収束していくことが示せた。

積分表示により、８の字結び目の２つのパラメータの比率を1に近付くと0に収束していくことが示せたが、5_2結び目と6_1結び目とホワイトヘッド絡み目も同様に0に収束していくことが示せた。その様子を下図で説明する。下に２つのパラメータを同時に動かした時のホワイトヘッドの漸近挙動の絶対値の図を載せる。漸近挙動の程度を示すパラメータは175,125,75でそれぞれ上から３つの折れ線グラフを表している。パラメータの比率が1に値は0に近づくのが読み取れる。



これらの結果については現在論文作成中である。

HOMFLY多項式の場合はいくつかの具体例が得られたので、Kauffman多項式の場合も計算した。いくつかのq整数に関する公式までは得られたが、今回の報告書までには具体例の計算までは行かなかった。

上記の研究は結び目のスケイン理論を用いるが、この計算過程において、ブレイド群のホモロジカルな表現とスケイン理論が関係していることが見出だせた。ホモロジカルな表現とは複素空間の直積からなる配置空間上でSelberg type の積分に付随した関数をのせたホモロジーを考える。このホモロジーには自然にブレイド群が作用するが、この作用に関して与えられた関数の偏角を計算する。全するとこれがブレイド群の作用となり、表現が得られる。この表現からJones多項式が得られることが知られている。この空間は定義から高次元の空間である。この空間とTemperley-Lieb代数のと間にベクトル空間としての対応を見つけることができた。Temperley-Lieb代数にはブレイド群が作用し、表現空間にもなっている。この表現はKauffmanのブラケット多項式と密接な関係があり、Kauffmanのブラケット多項式はJones多項式の別の構成方法として知られている。Temperley-Lieb代数とホモロジカルな表現との対応関係はブレイド群の作用に関して可換であり、高次元のホモロジーの計算が

Temperley-Lieb代数の２次元の計算に帰着されることになる。これによりホモロジーの変形が、そのまま結び目の変形に対応し、積分区間の記述が簡単になると期待される。これらは表現論の分野と関係しており、他分野との交流が活発になることも期待される。これらの結果についても現在論文作成中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

1. K. Kawagoe, M. Wakayama and Y. Yamasaki, q-Analogues of the Riemann zeta, the Dirichlet L-functions, and a crystal zeta function. Forum Math. 20, no. 1, 1--26, 2008. 査読有
2. K. Kawagoe, Limits of the HOMFLY polynomials of the figure-eight knot, Intelligence of low dimensional topology 2006, 143--150, 2007. 査読有

〔学会発表〕（計４件）

1. 川越謙一, A homological representation of Braid groups and the Alexander polynomial, 結び目の数学II, 2009, Dec. 24, 早稲田大学（東京都）
2. 川越謙一, On limits of HOMFLY polynomials of knots and links, トポロジーとコンピュータ2009, 2009,Aug. 31, 東工大（東京都）
3. 川越謙一, Homological representation of the Hecke algebras and the Temperley-Lieb algebras, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 2009, Feb. 10, 釜山大学（韓国）
4. 川越謙一, Homological representation of the Hecke algebras and the Temperley-Lieb algebras, 結び目の数学, 2008, Dec. 24, 東京女子大学（東京都）

６．研究組織

(1)研究代表者

川越　謙一（KAWAGOE KENICHI）

金沢大学・数物科学系・講師

研究者番号：50293337