様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２４日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４００７２
研究課題名（和文）　距離空間及び位相群における局所連結性と関数の一様性との関連に関する研究
研究課題名（英文）　Study on the relation between local connectedness and uniform continuity on metric spaces as well as topological groups

研究代表者
山田　耕三（YAMADA KOHZO）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：００２００７１７

研究成果の概要（和文）：距離空間（距離が定義された空間）において，すべてのコンパクト距離空間との積空間がストレートになることの必要十分条件が得られた。さらに，ある距離空間が，収束点列とその収束点からなる空間との積空間がストレートであれば，その距離空間が全有界になることが証明された。

研究成果の概要（英文）：We obtained a necessary and sufficient condition for the product space of a metric space with any compact metric space to be straight. Furthermore, we proved that if the product space of a metric space and a space consisting of a convergent sequence with its limit is straight, then the metric space is precompact.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	900,000	270,000	1,170,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相群

１．研究開始当初の背景
(1) 距離空間上の位相的性質だけではなく，導入されている距離にも依存する性質である，一様局所連結性は Continuum Theory の分野で古くから知られているものである。この性質を一般化したストレート性が最近 Berarducc, Dikranjan そして Pelant によって定義された。彼らの論文の中では，次のような興味ある，かつ重要な結果が得られた。

① 距離空間が一様局所連結ならばストレートである。

② 局所連結な距離空間においては，一様局所連結性とストレート性は同じ概念となる。

③　距離空間が完全非連結でありかつストレートであれば，その空間上で定義されたすべての実数値連続関数は一様連続となる。

これらの結果を出発点として，私は一様局所連結性とストレート性との関係をさらに詳しく調べる研究を始めた。

(2) 1960 年代に，位相空間論における重要な空間であるM_3-空間とM_1-空間が定義され，すべてのM_3-空間がM_1-空間になるかという問題（$M_3 \Rightarrow M_1$問題と呼ばれている。）が出された。以後半世紀が過ぎた現在においてもこの問題は未解決のままである。しかしながら，この問題に対する部分解やこの問題と同値となる様々な条件が得られている。さて，この問題に関して位相群を関連付けた結果が Spacheva によって最近得られた。この結果に刺激を受け位相群を利用してこの問題にアタックし始めた。

２．研究の目的

(1) 上記の「研究の背景」に述べた，ストレート性は Berarducc, Dikranjan そして Perant の 3 人による共著論文で定義されたが，それは次のような性質である。

距離空間Xの任意の 2 つの閉集合EとF，そしてX上で定義される任意の連続な実数値関数fに対して，EとFがXを覆っており，かつfをEとFでそれぞれ制限したとき，どちらの場合も一様連続になっているならば，f自身が一様連続関数である。

このようにストレート性は連続実数地関数を用いて定義されているが，上記の 3 人の共著の論文において，空間上の任意の 2 つの閉集合の位置関係に関する性質でこのストレート性を特徴づけている。この特徴づけを用いて，まずはいくつかの具体的な空間，例えばn次元ユークリッド空間やその部分空間であるn次元立方体さらには収束点列とその収束点からなる空間等についてストレート性を調べることから始め，ストレート性とコンパクト性や有界性との関係を調べることを目的とした。

(2) $M_3 \Rightarrow M_1$問題に関しては，位相群，特に自由位相群を用いた次の Spacheva の結果に着目した。

M_3-空間から生成される自由可換位相群はM_3-空間となる。

この自由可換位相群は位相的性質と群構造が密接に関係しあっておりそれらの性質を利用すれば，$M_3 \Rightarrow M_1$問題が自由可換位相群は上では解決するのではないかと考えている。まずはそのことについて研究をし，さらには一般の位相群でも調べることを目的とした。

３．研究の方法

研究分担者及び海外共同研究者とは，随時 e-mail で連絡を取り合い，研究目的欄で挙げた問題の解決に向けて研究を進めた。また，研究分担者及び国内のトポロジーの専門家とはできるだけ多くのセミナー及び共同研究を企画し，また春と秋に開催される日本数学会の年会，及び

①　5 月　位相空間論シンポジウム
②　7 月　全日本トポロジーシンポジウム
③　10 月　京都大学数理解析研究所での研究集会
④　12 月　General Topology Symposium

等，国内で開催されるトポロジーに関する研究集会に，参加し問題となっている点について，その問題点に関する専門家と討論を行った。

● 研究分担者･海外共同研究者との相互関係

研究目的欄に挙げた問題の解決を目指してセミナー及び共同研究を定期的に行い，問題解決のためのアイデアの交換と討論，先行研究に関する検討を行った。今回計画した 2 名の研究分担者及び 2 名の海外共同研究者とは，次のような活動を計画した。

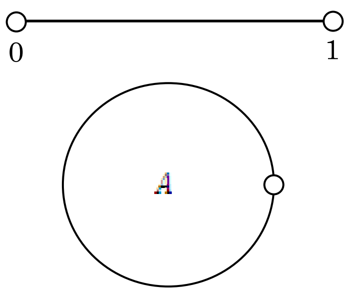
①大田氏

大田氏は，集合論的トポロジーの専門家であり，公理的集合論についても造詣が深い。また最近では，幾何学的トポロジーにおける写像の拡張理論の研究を行っている。本研究は，距離空間上で定義される実数値関数を道具として扱うが，関数を完備化，又はコンパクト化した空間へ拡張する手法も必要とされるので，大田氏の知識及び助言は必要不可欠である。本研究の先駆者である海外共同研究者の Dikranjan 氏から頂いたいくつかの論文をセミナーで読み，そのアイデアの理解を深めている。このセミナーは，時間の許す限り行ったが，さらに集合論的トポロジー及び幾何学的トポロジーの専門家のいる各大学に大田氏と訪問し，そこでセミナーを行い Dikranjan 氏によって始められた本研究に興味を持っていただき，且ついろいろな人のアイデアを吸収したいと考え，主に，筑波大学，横浜国立大学，京都大学，愛媛大学，島根大学でのセミナー及び共同研究を計画し

た。

②宮田氏
宮田氏は，代数学，特に整数論の専門家である。私は，本研究の前に位相群の幾何学的構造の研究を行っていたが，その際ニュージーランドの Victoria 大学の Pestov 氏や，愛媛大学の Shakhmatov 氏との共同論文で用いた semi direct product や torsion free abelian group についての解説や助言を多くしていただいてきた。本研究においても，研究目的欄にも記述したが，一様局所連結性及びストレート性の位相群への応用の研究が始められている。実際，距離化可能位相群Gがストレートであるとき，Gからの連続な準同型写像による像はまたストレートになることが証明されたが，その証明において使われる代数的な手法について解説をしていただいた。

③Dikranjan 氏，Gruenhage 氏
Dikranjan 氏は，本研究を始められた研究者であり，一方 Gruenhage 氏は，私が在外研究で，特に位相群の幾何学的構造の研究を共に行った研究者である。両氏とは，本研究の問題解決のため随時 e-mail で情報を交換した。
４．研究成果
(1) ストレート空間に関する研究成果
ストレート空間の定義は，研究の目的欄に述べたが，本研究の第一歩として一様局所連結性とストレート性との関係を詳しく調べることから始めた。具体的な空間で調べると，開区間(0, 1)は一様局所連結であるので，ストレートとなる。一方，サークルから1点を除いた空間$A = \{e^{i\theta} : 0 < \theta < 2\pi\}$は一様局所連結ではないが，さらにストレートでもないことがわかる。



一方，コンパクト距離空間は，その空間上で定義された実数値連続関数は常に一様連続であるので，定義よりストレートであることは明白である。よって，コンパクト距離空間で局所連結でない空間は，ストレートではあるが一般に一様局所連結ではない。例えば，$[0,1] \times C$但し，

$$C = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\right\} \cup \{0\}$$

がその例である。そこで，コンパクトでない距離空間で，局所連結かつストレートではあるが一様局所連結でない空間を探すことにした。その候補として，$R \times C$と$(0,1) \times C$（但し，Rは1次元ユークリッド空間を表す。）の2つの空間を考え，これらの空間のストレート性を調べた。これら位相的には同型である2つの空間は，コンパクトでない距離空間で，局所連結ではあるが一様局所連結ではないことは自明である。一方，$R \times C$はストレートでないが，$(0,1) \times C$はストレートになるという興味深い結果を得ることができた。さらにその証明を詳しく調べることにより次の結果を得た。

① 距離空間Xにおいて，すべてのコンパクト距離空間Kに対して$X \times K$がストレートであることと，$X \times C$がストレートであることは同値である。

② 距離空間Xにおいて，$X \times C$がストレートであればXは，全有界（つまりXの完備化がコンパクト）である。

本研究では，これらの結果をさらに発展させ，位相群上における一様局所連結性とストレート性を調べたい。本来位相群は，その代数構造に一様性を持っているので，その性質が位相群の位相的性質に作用し，これら2つの一様性を持つ性質がどう振る舞うかは，大変興味ある所である。最近，上記の1の論文の著者の一人 Dikranjan 氏から，ストレート性は位相群からの連続な順同型写像で保存されるという情報を得た。その証明を含めた論文を完成次第送って頂く予定である。また，Dikranjan 氏は，上記の②の逆も成立するという大変興味ある結果を得ている。Dikranjan 氏とは，これまで各国で開催されたコンファレンスで位相群の幾何学的構造に関する分野でしばしば討論してきたが，今後本研究課題についても，コンファレンスでの討論や，e-mail で随時情報交換をしていきたいと考えている。そこで，今後の研究テーマとしては特に，積に関する次の問題の解決を目標としたい。

- 距離空間Xが全有界でかつストレートであるとき，積空間X^{ω}はまたストレートとなるか？
- 各$n = 1, 2, \cdots$においてX_nを全有界でかつストレートである距離空間とするとき，積空間$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$はまたストレートになるか？

本研究はごく最近始められたトピックスで，本研究を手がけている研究者は，私を含めまだ数人であるが，国際会議等での Dikranjan 氏，そして私のこのトピックスに関する講演では，多くの研究者からの質問，及び論文の請求を受けており，多くの研究者に興味を持って頂いている。特に位相群の研究者たちからは，強い関心を持って頂いており，今後新たな研究者による本研究の発展が期待できると確信している。特に，一様局所連結性及びストレート性を位相群上で考え，研究する方向への発展が見られ，本研究を始める前から，私は，位相群特に自由位相群の幾何学的構造を調べていたので，是非この方面の研究にも積極的に参加していきたいと考えている。

(2) $M_3 \Rightarrow M_1$問題に関する成果

1960 年代に，位相空間論における重要な空間M_3-空間とM_1-空間が定義され，すべてのM_3-空間はM_1-空間となるかという問題（$M_3 \Rightarrow M_1$問題と呼ばれている。）が出された。以来半世紀が過ぎた現在においてもこの問題は解決されていない。しかしながら一方で，この問題における部分解や様々な同値条件が得られている。その中に「すべてのM_3-空間はあるM_1-空間の閉空間として表される。」という結果がある。この結果を用い「すべてのM_1-空間の閉空間がM_1-空間となる。」ことが，$M_3 \Rightarrow M_1$問題の同値条件となることが分かっている。

さて，今回の研究において，まず「すべてのM_3-空間はあるM_3-位相群の閉部分空間として表される。」という結果を得たが，その後この結果をさらに詳しく調べ，次のような結果を得ることができた。

① 与えられたM_3-空間Xが自明ではない収束点列を含んでいる場合は，その空間から生成された自由位相可換群$A(X)$がM_1-空間になる。よって，$A(X)$はM_1-空間である$A(X)$の閉部分空間となる。

② 自明でない収束点列を含まない M_3-空間，例えば可算な離散空間ωのStone-Čech コンパクト化$\beta\omega$を考え，$\beta\omega \setminus \omega$から１点を取り，その点と$\omega$との和集合からなる空間の場合においても，$M_1$-空間となるある自由可換位相群の閉部分空間となる。

これらの結果について講演を行ったが，論文はさらなる結果を積み上げ作成する予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① 大田春外，酒井政美，Sequences of semicontinuous functions accompanying continuous functions, Topology Appl. 156 (2009) no.17 2683-2691.

② 宮田由雅，On the Galois module structure of cyclic Kummer extensions, J. Algebra 320 (2008), no.9, 3461-3480.

③ 宮田由雅，On Galois structure of the integers in elementary abelian extensions of local number fields, J. Number Theory 125 (2007), no.2, 442-458.

④ 西島楠雄, 山田耕三, Products of straight spaces with compact spaces, Applied General Topology 8 (2007) 151-159.

〔学会発表〕（計 2 件）

① 大田春外，酒井政美，Sequences of semicontinuous functions accompanying contimuous functions, 日本数学科い 2009 年度秋季総合分科会，2009 年 9 月 26 日，大阪大学.

② 山田耕三, $M_3 \Rightarrow M_1$問題と自由可換位相群，第 44 回位相空間論シンポジウム，2009 年 5 月 31 日，島根大学総合理工学部.

６．研究組織

(1)研究代表者

山田　耕三（YAMADA KOHZO）

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号：００２００７１７

(2)研究分担者

大田　春外（OHTA HARUTO）

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号：４０１２６７６９

（H19 → H20：連携研究者）

宮田　由雅（MIYATA YOSHIMASA）

静岡大学・教育学部・名誉教授

研究者番号：５００２２０７

（H19 → H20：連携研究者）

(3)連携研究者