様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　6 月　12 日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2008
課題番号：19540074
研究課題名（和文）　コンパクトリー群の随伴作用に関する同変Ｋ群の表現論的および位相幾何学的研究

研究課題名（英文）　Representation theoretic and topological research on the equivariant K-theory of compact Lie groups with the adjoint action

研究代表者
西村　治（NISHIMURA OSAMU）
秀明大学・学校教師学部・講師
研究者番号：30402770

研究成果の概要：群、特にコンパクト・リー群は物事の対称性を記述するものとして数学の様々な場面に登場する非常に重要な研究対象である。コンパクト・リー群はそれ自身に対して随伴作用と呼ばれる標準的な作用を有しているが、これを研究することはコンパクト・リー群の積構造を理解するために重要であると考えられる。このコンパクト・リー群の随伴作用から定義される同変Ｋ群と呼ばれる代数的対象についての研究を行い、その構造についてのいくつかの知見を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	600,000	180,000	780,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：リー群、表現論、随伴作用、同変Ｋ群、不変式

１．研究開始当初の背景

（１）G をコンパクト連結リー群で基本群が自由なものであるとする。G のそれ自身への随伴作用 ad により G を G-空間と見なしたものを G_{ad} で表わす：

$ad : G\times G \to G,\ ad(x,y)=xyx^{-1}$。

G_{ad} の複素 G-同変 K コホモロジー環 $K_G^*(G_{ad})$ の構造についてはいくつかのことが既に知られていた。まずそのことについて以下に述べる。

（２）R(G)を G の複素表現環とする。初めに仮定したように基本群 $\pi_1(G)$ が自由であるとすると、R(G)は整数環 Z 上の多項式環とローラン多項式環のテンソル積と同型であることが知られている。（多項式環の生成元の数とローラン多項式環の生成元の数は G の半単純成分の階数とトーラス成分の階数にそれぞれ等しい。）

複素 G-同変 K コホモロジー理論 K_G^* の係数環 $K_G^*(point)$ は次のように与えられる。（同変ボット周期性が成り立っている。）

$K_G^{even}(point)=R(G)$, $K_G^{odd}(point)=0$

（３）R(G)については古典的な理論によりいろいろな性質が知られている。例えば T を G の極大トーラスとすると包含写像

$i : T \to G$

により誘導される準同型写像

$i^* : R(G) \to R(T)$

は単射である。(これは表現が指標により決定されることによる。) そして W を G の T に関するワイル群とすると W は R(T)の上に自然に作用するが、このとき i^*を通して R(G)は R(T)の W の作用に関する不変式環 $R(T)^W$と同型であることが知られている（ワイルの理論)。このことの証明において $i^*(R(G))$が $R(T)^W$に含まれることを示すのは容易である一方、$i^*(R(G))$が $R(T)^W$を含むことを示すのが難しく、積分公式などの解析的な手法が必要になる。

（４）Brylinski および Zhang による結果 (Equivariant K-Theory of Compact Conncted Lie groups, K-Theory 20 (2000), 23--36) により、このことの類似の結果が $K_G^*(G_{ad})$に対しても成り立つ。すなわち、極大トーラス T の複素 T-同変 K コホモロジー環 $K_T^*(T_{ad})$の上にもワイル群 W は自然に作用し、包含写像

$i : T \to G$

により誘導される準同型写像

$i^*: K_G^*(G_{ad}) \to K_T^*(T_{ad})$

は単射になる。そしてこの i^*を通して $K_G^*(G_{ad})$は $K_T^*(T_{ad})$の W の作用に関する不変式環 $K_T^*(T_{ad})^W$と同型になる。このことの証明においてもワイルの理論と同様に $i^*(K_G^*(G_{ad}))$が $K_T^*(T_{ad})^W$に含まれることを示すのは容易である一方、$i^*(K_G^*(G_{ad}))$が $K_T^*(T_{ad})^W$を含むことを示すのが難しく、この包含関係を示すことが Brylinski および Zhang の研究において本質的な部分であると考えられる。

（５）Brylinski および Zhang は上記論文においてこの包含関係を代数幾何学的な手法を用いて証明している。その概要は次のようなものである。

まず $K_G^*(G_{ad})$が環の包含関係 $Z \subset R(G)$に関するグロタンディーク代数 $\Omega^*_{R(G)/Z}$ (これは R(G)上の外積代数であり、生成元の個数は G の階数に等しい) と同型であることを示す。(もちろん G の極大トーラス T についても同様の同型が成り立つ。) そして G を代数群と見なし、代数幾何学に関する定理を用いることにより $\Omega^*_{R(G)/Z}$ が $\Omega^*_{R(T)/Z}$ へのワイル群 W の作用に関する不変式環 ${\Omega^*_{R(T)/Z}}^W$ と同型であることを示すというものである。

（６）一方 $K_G^*(G_{ad})$は表現論的および位相幾何学的な言葉によって定義される代数的対象であり、したがって上記の定理の証明についても代数幾何学的な手法を用いずに表現論的および位相幾何学的な手法のみによってなされるのが自然であると報告者は考えた。

以上が本研究課題の背景および動機である。さらに詳しい意義については研究の目的の欄で述べる。

２．研究の目的

（１）報告者は上記の Brylinski および Zhang の研究について、さらに以下のような課題を見出した。

Brylinski および Zhang は上に述べたように $i^*(K_G^*(G_{ad}))$が $K_T^*(T_{ad})^W$を含むことを証明するために代数幾何学的な手法を用いたのであるが、本質的にはある手続きを用いて $i^*(R(G))$が $R(T)^W$に等しいということに帰着させることによってこのことを証明している。従って $K_T^*(T_{ad})^W$ の各元がどのような $K_G^*(G_{ad})$の元に対応しているかということを直接的に示している訳ではない。

一方 $K_G^*(G_{ad})$の構造についてのさらに詳しい研究（例えばλ-作用素やアダムス作用素などが $K_G^*(G_{ad})$の上にどのように働いているか、など）を進めようと考える時、そのような対応を具体的に把握することは本質的に必要である。

報告者はその対応がどのようなルールによって決まるかという考察を推し進めることにより、Brylinski および Zhang の結果に関する表現論的および位相幾何学的な手法のみによる直接的で自然な別証明が得られるものと考えた。

（２）さらに上記に述べた研究がどのような応用を持っているかということについて以下に述べる。

①まず第一として上記の研究は $K_G^*(G_{ad})$に関する代数的位相幾何学の研究の枠組みを与えるという点が挙げられる。例えば既に述べたように $K_G^*(G_{ad})$の上のλ-作用素やアダムス作用素などを計算できるようになる。さらにそれを通して G 上の自由ループ群 LG の分類空間 BLG の位相幾何学的な研究にも役立てることができる。(Atiyah と Segal の完備化定理により、$K_G^0(point)=R(G)$および $K_G^*(G_{ad})$を I(G)（R(G)の augmentation ideal）により完備化したものはそれぞれ、$K^0(BG)=K(BG)$（BG は G の分類空間）および $K^*(BLG)$に同型である。しかもこの同型はワイル群 W の極大トーラス T への作用から誘導される W の BT や BLT への作用に関して自然である。

BLG については一部の G について mod p コホモロジー環の構造（コホモロジー作用も含む）が近年研究されているが、G が整係数ホモロジーに p 捩れを持つ場合は一般に BG や BLG の mod p コホモロジー環の構造は極めて複雑であり、ケースバイケースの難解な計算が必要となる。したがって整係数コホモロジーの構造も複雑で、特に全ての G について統一的な構造定理は存在しないといってもよい。

一方、複素 K 理論 $K^*(G)$ および $K(BG)$ に関しては、全ての G について統一的な構造定理が知られている。そして Brylinski および Zhang の研究は $K^*(BLG)$ についても同様に統一的な構造定理が存在することを示すものである。本研究は $K^*(BLG)$ についてのさらに深い研究を可能にするものとして大変意義があるものと考えられる。

②第二として、有限次元ユニタリ表現論において現れる様々な概念、例えば既約性や自己共役性、実構造およびシンプレクティック構造、テンソル積の既約分解、分岐則および誘導則、などを（随伴作用に関する）G-同変ベクトル束についても研究するための枠組みを与えるという点が挙げられる。これらは実 G-同変 K 群 $KO_G^*(G_{ad})$ やシンプレクティック G-同変 K 群 $KSp_G^*(G_{ad})$ についての研究にもつながる。また、古典群の表現論に関しては様々な公式を組み合わせ論的な概念を用いて具体的に書き表わすことも可能であるが、同様のことを G-同変ベクトル束についても行うための研究にもつながると考えられる。

３．研究の方法

（１）まず以下のような位相幾何学的および表現論的な考察を与えることを考えている。

$R(G)$ 上で $K_G^*(G_{ad})$ を生成する元を与える G の懸垂空間 ΣG 上の G-同変ベクトル束について調べ、それらの積が i^* によってどのような $K_T^*(T_{ad})$ の元に写されるかを考察する。

上記のことについて（トーラス以外で最も簡単な場合である）$G=SU(2)$ の場合には以下のようになることがわかる。この例に沿って一般の場合を考えていくことになる。

（２）例. $G=SU(2)$ の場合

①まず $SU(2)$ は単純であり、その階数は 1 である。

$\lambda : SU(2) \to U(2)$

は自然な包含写像とする。$SU(2)$ の極大トーラス $T=S^1$ は標準的なものとする。このとき

$i^* : R(SU(2))=Z[\lambda] \to R(T)=Z[\alpha, \alpha^{-1}]$

について次のことが知られている。（α は $T=S^1$ の恒等写像から得られる T の１次表現である。）

定理

ワイル群 $W=\Sigma_2$ の非自明元は α と α^{-1} の入れ替えとして作用する。よって $f(\alpha)\in R(T)$ に対して、$f(\alpha)\in R(T)^W=i^*(R(SU(2)))$ であることは $f(\alpha)=f(\alpha^{-1})$ であることと同値である。

定理

$i^*(\lambda)=\alpha+\alpha^{-1}$、特に表現 λ のウェイトに対応する T の表現は α と α^{-1} である。

②一方、λ を用いて自然に $\Sigma SU(2)$ 上の $SU(2)$-同変ベクトル束を構成でき、したがって $K_{SU(2)}^*(SU(2)_{ad})$ の元 $\beta_{ad}(\lambda)$ を構成することができる。そしてこの元について調べると次のようになることがわかる。ここで $K_T^*(T_{ad})$ は $R(T)$ と $K^*(T)$ とのテンソル積と同型であるので、以下ではこれらを同一視することにする。

定理

$\beta_{ad}(\lambda)$ は i^* によって $\alpha-\alpha^{-1}\in R(T)$ と $K^*(T)$ の生成元 $\beta(\alpha)$ とのテンソル積に写る。

$i^*(\beta_{ad}(\lambda))$ によって生成される $K_T^*(T_{ad})$ の部分代数を E^* とおくと、E^* は外積代数になることがわかる。そして E^* は $i^*(K_{SU(2)}^*(SU(2)_{ad}))$ に含まれ、したがって $K_T^*(T_{ad})^W$ に含まれる。一方 $K_T^*(T_{ad})^W$ の任意の元は、対称式に関する性質を用いることにより、$i^*(\beta_{ad}(\lambda))$ の倍元になっていることがわかる。したがって E^*、$i^*(K_{SU(2)}^*(SU(2)_{ad}))$、および $K_T^*(T_{ad})^W$ は全て一致することがわかる。とくに $K_{SU(2)}^*(SU(2)_{ad})$ は一つの元 $\beta_{ad}(\lambda)$ によって生成される $R(SU(2))$ 上の外積代数である。

③アダムス作用素 ψ^k については次のように計算される。

定理

$i^*(\beta_{ad}(\lambda))$ は ψ^k によって $i^*(\beta_{ad}(\lambda))$ の $k\rho_{k-1}$ 倍に写る。ここで ρ_{k-1} は最高ウェイトが α^{k-1} に対応するウェイトであるような $SU(2)$ の既約表現である。

４．研究成果

（１）第一の目的であった、Brylinski および Zhang の結果の表現論的および位相幾何学的な手法による別証明を得ることができた。その方法は「３．研究の方法」において $SU(2)$ に対して述べた方法を自然に拡張したものである。以下においてその証明の要点を述べ

る。ここでは簡単のため G は単連結であるとするが、基本群が自由である場合も若干の変更により同様に証明できる。

①G の基本表現を λ_1、λ_2、…、λ_rとする。（r は G の階数とする。）これらを用いて自然に ΣG 上の G-同変ベクトル束を構成でき、したがって $K_G^*(G_{ad})$の元 $\beta_{ad}(\lambda_1)$、…、$\beta_{ad}(\lambda_r)$を構成することができる。

$i^*(\beta_{ad}(\lambda_1))$、…、$i^*(\beta_{ad}(\lambda_r))$によって生成される $K_T^*(T_{ad})$の部分代数を E^*とおくと、E^*は外積代数になることが証明できる。その証明の核となるのは次の Atiyah による結果である。ここで α_1、…、α_rはローラン多項式環 R(T)の標準的な生成元とする。

定理
$i^*(\beta_{ad}(\lambda_1))$、…、$i^*(\beta_{ad}(\lambda_r))$の積は、(前に述べたように $K_T^*(T_{ad})$を R(T)と $K^*(T)$とのテンソル積と同一視して考えると）差積の一般化として知られるワイル群 W の作用に関する基本反対称元 $\delta \in R(T)$と、$K^*(T)$の r 個の生成元 $\beta(\alpha_1)$、…、$\beta(\alpha_r)$の積 $\in K^*(T)$とのテンソル積である。

SU(2)の場合と同様に E^*は $i^*(K_G^*(G_{ad}))$に含まれ、したがって $K_T^*(T_{ad})^W$に含まれる。

②$K_T^*(T_{ad})^W$が E^*に含まれることを以下のようにして証明できる。有限鏡映群が多項式環と外積代数のテンソル積に線形に作用する場合の不変式環について Solomon による結果が知られている。（Invariants of finite reflection groups, Nagoya Math. J. Volume 22 (1963), 57-64.）その証明の中で重要な役割を果たしているのは基本不変量のヤコビアンである。$K_T^*(T_{ad})$に対する W の作用は線形ではないため Solomon の方法をそのまま適用することはできないが、基本不変量のヤコビアンの代わりに上記の基本反対称元 $\delta \in R(T)$を用いることにより、ほぼ同様の方法を適用することができる。その結果として $K_T^*(T_{ad})^W$が E^*に含まれることを証明することができる。

③したがって E^*、$i^*(K_G^*(G_{ad}))$、および $K_T^*(T_{ad})^W$は全て一致することがわかる。とくに $K_G^*(G_{ad})$は $\beta_{ad}(\lambda_1)$、…、$\beta_{ad}(\lambda_r)$によって生成される R(G)上の外積代数である。

（２）さらに上記の別証明において用いた手法の応用として、$K_G^*(G_{ad})$上のアダムス作用素 ϕ^kを決定するための方法を以下のようにまとめた。

①$\beta_{ad}(\lambda_i)=q_i$とおく。$\phi^k$の性質を考えると各 i について $\phi^k(q_i)$を q_1、q_2、…、q_rの R(G)上の１次結合で表せば十分である。その q_jの係数 $c_{i,j} \in R(G)$を計算するためには、$\phi^k(q_i)$と q_1、q_2、…、q_r（ただし q_iは除く）との積を計算すればよい。この元は q_1、q_2、…、q_r の積の $c_{i,j}$倍（符号は除く）である。

②$i^*(q_i)= q_i'$とする。先に述べた定理によって q_1'、q_2'、…、q_r'の積はワイル群 W の作用に関する基本反対称元 $\delta \in R(T)$と、$K^*(T)$の r 個の生成元 $\beta(\alpha_1)$、…、$\beta(\alpha_r)$の積 $\in K^*(T)$とのテンソル積である。

③$\phi^k(q_i')$と q_1'、q_2'、…、q_r'（ただし q_i'は除く）との積が②で述べた元の $c_{i,j}'$倍であるとすると、$c_{i,j}'$は $c_{i,j}$に対応する $R(T)^W$の元となる。

④よって③で述べた積を計算することによって $c_{i,j}'$を計算し、対応する R(G)の元を求めることにより $c_{i,j}$を求めることができる。

⑤$c_{i,j}'$を計算する方法をさらに詳しく述べると次のようになる。③で述べた積は、R(T)の反対称元 $y_{i,j}$と $\beta(\alpha_1)$、…、$\beta(\alpha_r)$の積のテンソル積になることがわかる。R(T)の任意の反対称元は基本反対称元 $\delta \in R(T)$の対称元 $\in R(T)^W$倍になることが知られているが、反対称元 $y_{i,j}$に対応するそのような対称元がまさに $c_{i,j}'$である。そして反対称元に関する一般的な性質により、$y_{i,j}$から $c_{i,j}'$を計算するためには全ての項を見る必要はなく、特定の元のみに注目すればよいことがわかる。それと同時に $c_{i,j}$の既約分解が得られる。（$y_{i,j}$ は W に関する基本反対称和のいくつかの和になっており、一つ一つの基本反対称和に対して R(G)の既約表現が対応しているから。）

計算機の助けも借りてこの方法を実行することにより、G の階数が低い場合のいくつかのケースについて、$K_G^*(G_{ad})$上のアダムス作用素を完全に決定することができた。

（３）現在これらの結果を取りまとめた論文を投稿準備中である。また、さらに一般の G についての $K_G^*(G_{ad})$の構造に関する研究を継続中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０　件）

〔学会発表〕（計　0　件）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者
西村　治（NISHIMURA OSAMU）
秀明大学・学校教師学部・講師
研究者番号：30402770

(2)研究分担者

(3)連携研究者