様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 6 月 4 日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：19540075
研究課題名（和文）高次元カテゴリーとその応用

研究課題名（英文）　Higher dimensional category and its applications

研究代表者
西田　吾郎（NISHIDA　GORO）
京都大学・情報学研究科・研究員
研究者番号：00027377

研究成果の概要（和文）：有限ポストニコフ空間から有限複体への写像空間が可縮であることを示した。この結果から、ホモトピー群とホモロジー群のいずれかはある次元以上で 0 になることはないことが示される。特にホモロジー群に自由成分のない有限複体のホモトピー群はある次元以上で 0 になることはないという Serre の予想が示された。

研究成果の概要（英文）：It is shown that a based mapping space from a finite Postnikov space to a finite complex is contractible. This implies that either homology groups or homotopy groups is not bounded up to certain dimension. In particular the Serre conjecture, homotopy groups of a finite complex with torsion homology is not bounded, is proved.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：1.カテゴリー　2.ホモトピー論　3.形式群　4.楕円コホモロジー　5.表現論　6.K-理論　7.指標　8.対称群

１．研究開始当初の背景

近年、安定ホモトピー圏の精密な基礎付けがなされ、安定ホモトピー圏において環や加群が　(up to homotopy ではなく）rigid な意味で定義でき、安定ホモトピー圏においても Grothendieck 流の代数幾何学が展開できることが、M.Hopkins を中心とするグループによって明らかになってきた。これにより、種々のスペクトラムや、従ってコホモロジー論の構成や性質の解明が明確になってきた。例えばスペクトラムのガロア拡大の概念やガロア群作用が rigid に定義される。これを用いて KO 理論が K 理論からガロア不変な理論として得られたように、Morava K-理論たちのガロア不変な理論として種々のペリオドのコホモロジー論が構成された。最近、このような理論を用いて M.Hopkins たちは懸案であった Arf 不変量問題を解決した。ちょうどこれは、Hopf 不変量問題が KO 理論

によって解かれたのと軌を一にしており、現代流の安定ホモトピー論の有効性を示しているものである。

２．研究の目的

代数的トポロジーでは複素コボルディズムあるいはその局所理論である BP-理論による安定ホモトピー論の研究が主流であるが、複素コボルディズム環のアフィンスキームに対応する一般コホモロジー論の研究の中から最も重要な研究課題として楕円コホモロジー論および Morava K-理論が見い出されてきた。これらはホモトピー論への応用もさることながら、代数幾何学、整数論あるいは数理物理学と代数的トポロジーの関係を考えるときその鍵となるものでありこれまでにも多くの知見が得られている。高さ n の Morava K-理論は、局所環上の高さ n の形式群の Lubin-Tate 変形理論を用いて定義される。

位相幾何において重要な結果は、例えば古典的な de Rham 理論と特異コホモロジー論のようなそれぞれ別個に定義されるものの密接な関係である。しかしながらこれまでのところ、背景で述べたような安定ホモトピー圏の代数幾何学的展開や手法が適用されるのは、ホモトピー論独自のものではなく、実質的には複素コボルディズム理論という多様体の幾何学的対象である。このギャップを埋めるものとして当該研究者が注目したのは、代数的K 理論である。これはホモトピー論的あるいは組合せ論的に直接定義され、無限ループ空間理論という強力な道具を用いることができる。例えば幾何学的K 理論と有限体の代数的K 理論の密接な関係が Quillen によって知られている。複素コボルディズム理論から誘導される、他の重要な理論である楕円コホモロジー論は Witten の楕円種数をコホモロジー論的に記述するため形式群を用いて技巧的に定義されたものである。これもやはり、より自然なK 理論的構成が、理論の本質的理解や深い応用に必須となっている。この問題について G. Segal はまず楕円コホモロジーを空間の surface category からの関手として組合せ論的記述のプログラムを提示した。K-理論が path category からベクトル空間の category への関手として記述されるという古典的結果を、より高次の構造(例えば共形構造)を持つ surface category に拡張しようとするもので多くの研究がなされている。

本研究の目的は、上のような観点から代数的K 理論の拡張を目指すものである。これには２つの方向があると考える。ひとつは形式群を用いるものである。通常の代数的K 理論は、与えられた環に対し、環上の線形群を用いる。一方、完備な局所環とその上で定義された形式群が与えられたとき、行列環は可換ではないが、可換な２つの行列に対し形式群による積演算が定義される。このとき可逆な行列たちは群ではないが、Segal のΓ 集合となり、従って単体集合として分類空間が定義される。この分類空間たちから Quillen と同様にK 理論を構成することができる。このような K 理論の基本的性質の解明が第１の研究課題である。

第２に考えるのは高次元の圏、いわゆる n-category の理論である。通常の代数的K 理論は、環上の加群の圏に基づいて定義される。この圏の分類空間は、線形群の分類空間であり高次のホモトピー群のないいわゆる K(π、1) 空間である。代数的 K 理論のこのような構成は、形式的には高次元の圏に容易に拡張できる。Kaplanov-Voevodsky は n-category 特に離散的な n-亜群の定式化を行ない、そのホモトピー圏はｎより大きな次元のホモトピー群を持たない空間のホモトピー圏と同値であることを示した。従って高次元の圏に基づく K 理論は、K(π、1) 空間より豊富な情報を持っていると考えられる。このような方向の研究としては、具体的な高次元の圏、例えば 2-ベクトル空間、つまり通常のベクトル空間の圏を ring category とみなしたとき、module category たちの圏について細部まで調べることが出発点となる。

３．研究の方法

有限ポストニコフ空間の研究については、シンガポール大学の J.Berrick 教授とシンガポール大学に出張し、あるいは電子メール等で意見を交換し共同研究を行なった。また連携研究者の名古屋工業大学の南範彦教授、岡山大学の鳥居猛准教授とは安定ホモトピー圏の最新理論の応用など討論し研究を進めた。

４．研究成果

研究目的で述べたように高次元のカテゴリー、特に高次元の亜群の分類空間はある所より大きな次元で 0 でないホモトピー群を持たない空間である。1 次元の場合、つまり離散群の場合は、G が局所有限群、X が有限複体のとき、分類空間 BG から X への写像空間が可縮であるという Sullivan 予想に関する H.Miller の定理が知られている。これに関し、シンガポール国立大学の J.Berrick 教授と共同研究を行ない次の結果を得た。W を有限ポストニコフ空間、つまりある所より大きな次元で 0 でないホモトピー群を持たない空間とし、X は有限複体とする。W の基本群が局所有限であれば、 W から X への写像空間は可縮である。証明は概略次のように行う。W のような空間は、Eilenberg-MacLane 空間をファイバーとする主ファイバー空間の有限列として得られるが、これを位相群のある種の中心列の分類空間とみなすことができる。位相群の短完全列に対し、同変写像空間のファイバー列が得られる。これは Miller が離散群の場合に示した結果の拡張である。従って一般の W に関する結果は Eilenberg-MacLane 空間の場合に帰着されるが、Eilenberg-MacLane 空間のカテゴリカルな構成から、さらに K(π、1) 空間の場合に帰着されるが、これは Miller の結果に他ならない。

この結果は、上のような有限ポストニコフ空間と、有限複体、つまりある所より大きな次元のホモロジー群を持たない空間とのある種の相反性を意味するものと考えられる。云い換えるとホモロジー群の有限次元性と、ホモトピー群の有限次元性は両立しないことを意味しるが、これは空間の n 連結性がホモロジーとホモトピーで同値であることと

比べ興味深い現象と思われる。一方、Kan-Thurston の定理から，任意の空間 X は K(π、1) 空間のホモロジー型を持ち、K(π、1) 空間の＋構成として得られる。つまり任意の空間 X のホモロジーはある種の群のホモロジーとして実現される。我々の定理から X が有限複体であれば、そのような群は十分大きな群でなければならないことがわかる。さらに空間 X から Y への写像が、ある所より大きな次元のホモトピー群の同型を導くのはどのような場合かを調べ、そのような写像たちによる局所化の性質を解明した。
次に安定ホモトピー群についても同様の結果が成り立つことを証明した。 W を有限ポストニコフスペクトラム、つまりある次元内にだけ 0 でない安定ホモトピー群を持つスペクトラムとし、X は有限スペクトラムとする。このとき W から X への安定写像の安定ホモトピー類は 0 である。これは Adams スペクトル列を用いて示すのであるが、そのとき Steenrod 代数が Frobenius 代数である、つまりそれ自身 injective であることが point である。これは当該研究者によって得られていた、Steenrod 代数がある種の群の群環の完備化であることから証明される。従って上の結果が W が Eilenberg-MacLane スペクトラムの場合がまず示され、一般の場合も完全列の議論から示される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 12 件）

Takeshi Torii,
On E_∞-structure of the generalized Chern character,
to appear in Bull. Lond. Math. Soc.

Takeshi Torii,
HKR characters, p-divisible groups and the generalized Chern character,
to appear in Trans. Amer. Math. Soc. 査読有

Takeshi Torii,
Comparison of Morava E-theories,
to appear in Math. Z. 査読有

Takeshi Torii,
Milnor operations and the generalized Chern character
Geom. Topol. Monogr., 査読有 (2007), 10, 383--421

Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii,
Algebraic vector bundles on $SL(3,C)$,
Rocky Mountain J. Math., 査読有 (2007), 37, 587–596

Takeshi Torii,
On relations between 1-lines of Adams-Novikov spectral sequences
modulo invariant prime ideals,
Topology Appl., 査読有 (2005), 150, 33-57

Norihiko Minami:
A possible hierarchy of Morava K-theories,
Elliptic cohomology, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 342, Cambridge Univ. Press, (査読有)
(2007) 255--264

Norihiko Minami; Jack Morava; W. Stephen Wilson:
Goro Nishida,
Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003), front matter, Geom. Topol. Monogr., 10,
Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.
(査読無),

Mikio Furuta; Yukio Kametani; Norihiko Minami:
Nilpotency of the Bauer-Furuta stable homotopy Seiberg-Witten invariants.
Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003), 147--154, Geom. Topol. Monogr., 10, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.
(査読有).

Mikio Furuta; Yukio Kametani; Norihiko Minami:
Homotopy theoretical considerations of the Bauer-Furuta stable homotopy Seiberg-Witten invariants. Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003), 155--166, Geom. Topol. Monogr., 10, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.
(査読有).

南範彦:
Lurie's quasi category Yoneda's lemma, 京都大学数理解析研究所講究録（査読無),
変換群の幾何とその周辺， 21-40 (2008).

南範彦:
Lurie's Topological Quantum Field Theory,
京都大学数理解析研究所講究録（査読無),
変換群論の新たな展開% (2009-08-17～2009-08-20)

〔学会発表〕（計 5 件）

南範彦:
Lurie's quasi category topos theory,
ホモトピー論シンポジウム, サンポートホール高松, 2008 年 12 月 7 日.

南範彦:
Meromorphicity of some deformed multivariable zeta function for F_1-schemes,
代数学分科会一般講演, 2009 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 24 日.

南範彦:
Lurie's Topological Quantum Field Theory Ⅱ,
第 36 回変換群論シンポジウム, 大阪市立大学杉本キャンパス, 2009 年 12 月 12 日.

南範彦:
F_1-スキームの井草型多変数ゼータ関数に由来する有限アーベル群の不変量について,
代数学分科会一般講演, 2010 日本数学会年会, 2010 年 3 月 27 日.

西田吾郎
Note on Miller's theorem and mapping spaces,
福岡ホモトピー論セミナー、福岡大学、2010 年 1 月 10 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
西田　吾郎（NHIDA GORO）
京都大学・情報学研究科・研究員
研究者番号：00027377

(2)研究分担者
河野　明（KONO AKIRA）
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：00093237
（H19→H20：連携研究者）
深谷賢治（FUKAYA KINJI）
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：30165261
（H19→H20：連携研究者）
中島　啓（NAKAJIMA HIRAKU）
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：00201666
（H19→H20：連携研究者）
森脇　淳（MORIWAKI ATSUSHI）
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：70191062
（H19→H20：連携研究者）
吉田　敬之（YOSHIDA HIROYUKI）
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：40108973
（H19→H20：連携研究者）
若野　功（WAKANO ISAO）
京都大学・情報学研究科・講師
研究者番号：00263509

(3)連携研究者
南　範彦（MINAMI NORIHIKO）
名古屋工業大学・工学研究科・教授
研究者番号：80166090
鳥居　猛（TORII TAKESHI）
岡山大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号：30341407