様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月１７日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４００７６
研究課題名（和文）　旗多様体上の軌道対応と積分変換

研究課題名（英文）　Orbit correspondence on flag manifolds and integral transformations

研究代表者
松木　敏彦（MATSUKI TOSHIHIKO）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：２０１５７２８３

研究成果の概要(和文)：S. Gindikin による horospherical Cauchy 変換を SU(2,1)/U(1,1) の離散系列表現の記述の問題に応用した。旗多様体上の軌道分解を記述するコンピュータプログラムの軌道の記述方法と以前に得られていたワイル群の部分群の記述との関係を検討した。有限体上の旗多様体の対称部分群による軌道分解の問題についても具体例を計算した。多重旗多様体の軌道分解について、小さな部分群の軌道分解に帰着させて直接的に計算する方法を開発した。

研究成果の概要（英文）： We applied the horospherical Cauchy transformation due to S. Gindikin for the case of SU(2,1)/U(1,1). We compared the computer program to describe the orbits on flag manifolds with the description of subgroups of Weyl groups. We also computed examples of orbits on flag manifolds over finite fields by symmetric subgroups. We reduced the orbit decomposition of multiple flag varieties to smaller subgroups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・幾何学
キーワード：　対称空間、リー群、表現論

１．研究開始当初の背景

(1) 1990 年に Akhiezer と Gindikin はンコンパクトタイプのリーマン対称空間 G/K の複素化 G_C/K_C の中に自然な G 不変領域 D（Akhiezer-Gindikin 領域あるいは complex crown と呼ばれる）を定義した。

一方、G の複素化 G_C の任意の旗多様体上の K の複素化 K_C の軌道 S と G-軌道 S’ は条件「S と S’ の交わりは空でないコンパクト集合」によって１対１に対応している

が、G_C の元 x に対し、「xS と S' の交わりは空でないコンパクト集合」となるような x のなす G_C の部分集合を C(S) とする。

Gindikin と研究代表者との共同研究において提起された次の予想は、Wolf, Zierau, Barchini, Fels, Huckleberry らの各段階における重要な寄与の下に、最終的には研究代表者の研究によって定理となった。

定理 任意の旗多様体の上の、すべての nonholomorphic type の K_C-軌道 S に対し、C(S) の単位元の連結成分 $C(S)_0$ は D と一致する。ただし、Wolf-Zierau によって G がエルミート型のときに holomorphic type の閉 K_C-軌道が定義されているが、それ以外の K_C-軌道はすべて nonholomorphic type と定義する。

(2) 関連する研究としては、Wolf らによる一連の cycle space の研究があるが、これは開 G-軌道に対応する閉 K_C-軌道に関するものとして上記の研究の一部分と見なすことができる。また、この逆の閉 G-軌道と開 K_C-軌道に関することから、G/K 上の不変微分作用素の同時固有関数はすべて D に解析接続できることが示せる。これらの関数の挙動に関して、Kroetz, Stanton, Opdam らによる研究がある。

しかしながら、いずれの研究でも旗多様体上の軌道対応との関係については全く考慮されていない。さらに実リー群への一般化や C(S) の他の連結成分については誰も研究していない。

(3) そもそもの問題は複素対称空間内の領域の問題であるが、この研究ではそれを旗多様体上の軌道対応の問題と捉えることに特徴がある。この考え方により、軌道の間の関係に関する研究代表者の理論が使えるので、かなりの事柄が一般的に証明できる。最近の研究においても、軌道対応を具体的に詳しく研究することによってリー群論だけを用いて解決された。

また、２つの対称部分群に関する両側剰余類分解の構造が明らかになっているので、D の境界の構造を詳しく調べて、定理の一般化を研究することが可能である。

(4) S. Gindikin により、複素対称空間およびコンパクト対称空間の上の horospherical Cauchy 変換とその逆変換が定義され、Gindikin-Kroetz-Olafsson によって compactly causal 対称空間上の正則離散系列表現との関係が研究された。

２．研究の目的

(1) C(S) の他の連結成分の構造を調べる。

(2) この問題は、実リー群の旗多様体上の２つの随伴する対称部分群に関する軌道対応の問題として一般化することができる。定理をこの場合に拡張する。

(3) 対称空間上の積分変換、表現論への応用

３．研究の方法

(1) Akhiezer-Gindikin 領域上に自然に構成される G-K_C 不変関数に関する解析と、具体例の計算で用いた関数の解析との関係を明確にし、用いられている解析的方法の本質を明らかにする。これによって、定理の証明における技術的に難解な部分の簡明化を目指す。

(2) 実リー群の旗多様体上の２つの随伴する対称部分群に関する軌道対応の問題として一般化する。この方法によれば、対称性により閉軌道と開軌道を同じように扱え、さらにルート系の構造については複素リー群の場合よりも明解になるはずである。nonholomorphic type の概念については根本的に一般化しなければならない。

(3) コンパクト対称空間上のラドン変換、horospherical 変換、離散系列表現の実現など対称空間上の積分変換、表現論への応用については、その方面の専門家との意見交換を中心にする。

(4) Rutgers 大学の S. Gindikin との研究連絡を行なう。

(5) 関連する海外での研究集会に参加する。

(6) この研究に関係する Kroetz, Stanton, Olafsson らの海外の研究者と研究交流を行なう。

(7) リー群の構造と表現に関する研究集会を行なう。

(8) 国内でのリー群、表現論関係の研究集会に出席するとともにその運営に協力する

(9) リー群、表現論関係の書籍を充実し、必要な情報関連機器を整備する。

４．研究成果

(1) 最も簡単なリーマン球面上の軌道分解についての場合に $C(S_{op})$ は４つの連結成分を持つ。様々な旗多様体上の閉 K_C-軌道 S について、どのような場合に C(S) が連結でなくなるかを調べた。エルミート型のときはわかっているので、非エルミート型のときが問題である。

たとえば、複素射影空間 $P^{n-1}(C)$ 上の複素直交群による閉軌道の場合は n が偶数のときに連結成分が２つであり、奇数のときは１つである。

(2) 2007 年の研究代表者の論文によって $C(S)_0$ の記述に関する予想は最終的に解決されたが、当初の S. Gindikin との共同研究で用いられた線形代数による初等的方法とはかなり異なっている。両者の関係について、具体例に基づいて明らかにしつつある。これによって、実リー群の場合への拡張の方法が明らかになってきた。

(3) S. Gindikin による horospherical Cauchy 変換を半単純対称空間の離散系列表現の記述の問題に応用することについて、正則離散系列の場合には部分的に研究されているが、そうでない場合の研究はこれまで全くなされていない。最も簡単な SU(2,1)/U(1,1) の場合について研究した。

(4) D. Vogan らのグループによって開発された旗多様体上の軌道分解を記述するコンピュータプログラムの軌道の記述方法と以前に得られていたワイル群の部分群の記述との関係を検討した。有限体上の旗多様体の対称部分群による軌道分解の問題についても具体例を計算した。

(5) 旗多様体上の複素対称部分群による軌道について、閉軌道になるための条件をべき零根基の射影の条件で特徴づけた。また、旗多様体の軌道分解の最も基本的な例である非ユークリッド幾何の上半平面モデルに関して、群論的な立場から初等的な解説を試みた。

(6) 多重旗多様体の軌道分解について、小さな部分群の軌道分解に帰着させて直接的に計算する方法を開発した。この方法により、一般線形群とシンプレクティック群の場合に知られている有限型の分解を直交群の場合にも行なうことを目指し、さらに例外型についても研究中である。

(7) 分担者菊地は階数３の multiplicity-free 作用について、その作用の各既約成分に対応する不変式に関して、既に基本最高ウェイトに対応する不変式の多項式としての具体的な表示を既に得ていたが、そこに現れる多項式が階数１の compact Riemann 対称空間の帯球函数になることを見出した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① <u>菊地克彦</u>，階数 4 の multiplicity-free 作用に関する不変式，数理解析研究所講究録別冊(掲載予定)，査読有

② <u>T. Matsuki</u>, The orbit correspondence on flag manifolds and the Stein extension of Riemannian symmetric spaces, Sugaku Expositions **21**(2008), 71-81, 査読有

③ <u>T. Matsuki</u>, Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds III, Trans. Amer. Math. Soc. **359**(2007), 4773-4786, 査読有

〔学会発表〕（計５件）

① <u>菊地克彦</u>，階数 4 の半古典型 multiplicity-free 作用に関する不変微分作用素，2009 年 3 月 28 日，日本数学会年会

② <u>T. Matsuki</u>, Analysis and geometry on homogeneous spaces, 微分方程式と対称空間研究集会，2009 年 1 月 14 日，東大数理科学研究科

③ <u>菊地克彦</u>，階数 4 の multiplicity-free 作用に関する不変式，2008 年 9 月 17 日，数理解析研究所研究集会

④ <u>T. Matsuki</u>, Duality of orbits on flag manifolds and Stein extensions of Riemannian symmetric spaces, 日露ワークショップ，2008 年 2 月 19 日，九州大学西新プラザ

⑤ <u>T. Matsuki</u>, Stein extensions of symmetric spaces and the duality of orbits on flag manifolds, マックスプランク研究所セミナー，2007 年 7 月 2 日，マックスプランク数学研究所

〔その他〕

ホームページ等
http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~matsuki

６．研究組織
(1)研究代表者
　松木　敏彦 (MATSUKI TOSHIHIKO)
　京都大学・大学院理学研究科・教授
　研究者番号：２０１５７２８３

(2)研究分担者
　菊地　克彦 (KIKUCHI KATSUHIKO)
　京都大学・大学院理学研究科・助教
　研究者番号：５０２８３５８６

(3)連携研究者
　　　　　　　(　　)

　研究者番号：