

研究種目： 基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2009

課題番号：19540080

研究課題名 (和文) 射影極小曲面の定める微分方程式系の研究

研究課題名 (英文) A study of systems of differential equations associated with projectively minimal surfaces

研究代表者

佐々木 武 (SASAKI TAKESHI)

神戸大学・自然科学系先端融合研究環・名誉教授

研究者番号：00022682

研究成果の概要 (和文): 超幾何微分方程式から得られる 3 次元双曲空間内の平坦曲面の定義を与え、その特異点の種類と各々が方程式のパラメータにどのように依存するかを、計算代数を用いた解析、写像の特異点論の詳細化によって示し、無限遠挙動の分析を行った。また、ある種の離散可積分系の解を用いた 3 次元双曲空間内に離散的平坦曲面を定義する方法の提案、射影極小曲面の研究についての総合報告を行い、線叢による射影極小曲面の変換と関係する微分方程式系の研究についての今後の研究課題を提案した。

研究成果の概要 (英文): We defined the flat surfaces in the 3-dimensional hyperbolic space by hypergeometric differential equations and studied the singularities of such surfaces, their dependence on the parameters of the equations and the asymptotic behavior of the surfaces by using the computer algebra and a clarification of the singularities of mappings. We proposed also the definitions of discrete flat surfaces by using some discrete integrable systems. We gave surveys on the study of projective minimal surfaces and proposed research problems on transformation of such surfaces in terms of line congruence and on a study of related differential equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野： 微分幾何学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 射影曲面、超幾何微分方程式、射影極小曲面、アフィン球面、双曲シュバルツ写像

## 1. 研究開始当初の背景

3次元射影空間内の曲面は射影的に不変な3次の不変量をもっている。それを使って得られる積分不変量(曲面の汎関数)が極値を取るとき、射影極小曲面という。アフィン球面を含む曲面の広いクラスを作っている。一般に、3次元射影空間内の曲面は、局所的には、正規化された座標  $(x, y)$  に関して微分方程式系

$$z_{xx} = bz_y + pz, \quad z_{yy} = cz_x + qz$$

の独立な4個の解を並べて得られる  $P^3$  への写像( $z$  とかく)で定められる。この表現では、積分  $\int bc dx dy$  が当該の積分不変量である。一方、大域的に定義された微分方程式系で射影極小曲面を定めるものは多くは知られていない。射影極小曲面の変換理論を使って、新しい微分方程式系を探索することによって、射影極小曲面の広がりを知りたいことが研究の背景である。

同時に、超幾何微分方程式の定める曲面の性質、曲線の性質を知ること、大域的な例を作る上で大変重要であり、その研究も求められているところである。

## 2. 研究の目的

上記の記号  $z$  を用いると、新しい曲面  $w$  を

$$w = \lambda z + Az_x + Bz_y$$

の形で構成する。幾何的には各点  $w(x, y)$  は曲面  $z$  の  $(x, y)$  での接平面上に載っている。特に曲面の持つ自然な共形構造が一致するとき、対応  $z \mapsto w$  を Weingarten 線叢という。そこで、 $z$  及び  $w$  が共に射影極小であり、 $z \mapsto w$  が Weingarten 線叢であるように、係数関数  $\mu, A, B$  を決めることが適切な問題である。Moutard による偏微分方程式  $z_{xy} = Az$  の変換の方法を採用して、その変形自由度を記述することができる。この構成方法を遂行できれば、1つの射影極小曲面から6次元の自由度を持つ微分方程式系が得られる。

これを、既知の超幾何微分方程式系に適用すること、そのためにも、超幾何微分方程式の幾何的研究を進めることが主要な目的である。

## 3. 研究の方法

### (1) 射影極小曲面の変換理論の整理

射影曲面には Demoulin 変換と呼ばれる一般の変換方法がある。この変換に関して射影極小曲面の

クラスは不変である。そのクラスの中に Demoulin 変換の退化の度合いに応じて、Godeaux-Rozet 曲面、Demoulin 曲面と呼ばれる部分族があり、さらにそれらの特殊化であるアフィン球面が含まれている。これらの階層構造と射影極小曲面の変換の退化の関係を整理し、その応用を目指す。

### (2) 既知の超幾何微分方程式の定める曲面および曲線の幾何学的研究

既知の超幾何微分方程式から幾何学的対象を取り出す方法は代表者たちの研究でかなり前進を見てきた。この方法を更に具体化することを目指す。

## 4. 研究成果

(1) 2階の複素常微分方程式の解を用いて、3次元双曲空間内への写像が定義される。我々はこれを双曲シュバルツ写像と呼ぶこととし、超幾何微分方程式から得られる曲面の大域的研究を行った。曲面の特異点のうち、尖端特異点、燕尾特異点、A4型特異点の現れ方を詳細に明らかにし、方程式のパラメータが変化するとき、それらの特異点がどのように変化するかを計算代数を用いて解析した。写像の特異点論の詳細化と超幾何関数の無限遠挙動の分析など、代表者の専門を越えて研究を進める必要があった。これらは、M. Yoshida (九州大学), K. Yamada (東京工業大学), M. Noro (神戸大学), K. Saji (岐阜大学), T. Koike (神戸大学) との共同研究により実行した。

これらの成果は、Galatasaray University (Istanbul, Turkey) での研究集会 “Arrangements, Local Systems and Singularities,” Math. Inst. Bedlewo (Poznan, Poland) での研究集会 “Conference on Differential Geometry,” Univ. Granada (Spain) でのコロキウム、Math. Forsch. Institut (Oberwolfach, Germany) での研究集会 “Geometry and arithmetic around hypergeometric functions,” 等で発表した。

(2) 上記の3次元双曲空間内に平坦曲面を定義する方法は同じく3次元双曲空間内に離散的平坦曲面を定義することに適用できることがわかった。T. Hoffman (Univ. München), W. Rossman (神戸大学), M. Yoshida と共同して、ある種の離散可積分系の解を用いて、離散的平坦曲面を定義し、その曲面を基に離散的線形 Weingarten 曲面を定義する方法を定め、解の具体形を用いて曲面を描画した。さらに、それら離散曲面の特異点の現れ

方について、若干の研究を行った。

これらは論文 T. Hoffman, W. Rossman, T. Sasaki, and M. Yoshida, Discrete flat surfaces in hyperbolic 3-space, Sept. 2009, preprint にまとめ、投稿中である。

(3) 射影極小曲面の特別のクラスにアフィン球面があり、その変換理論は古くから知られている。アフィン球面の性質、分類、その変換についての総合報告、それらの射影極小曲面への一般化の方法、射影極小曲面の性質、構成について、「凸領域の幾何 — アフィン微分幾何の方法」(2008年1月11日, 神戸大学)、「射影極小曲面の楽しみ」(2008年2月21日,22日, 九州大学)において行った。さらに、「射影極小曲面の幾何」(2010年3月19日, 大阪大学)と題して、射影極小曲面の非線形微分方程式による特徴付けとアフィン微分幾何の方法による特徴付け、Demoulin 変換との関係、Weingarten 線叢による射影極小曲面の変換、対応する微分方程式系の変換等についての講演を行った。

(4) 階数が4のアペルの超幾何微分方程式系の定める射影曲面の種類については既に代表者による研究があるが、階数3の一般型超幾何方程式の定める曲線についての研究はこれまでなかった。もっとも易しく、かつ、trivial でないケースが曲線が3次曲線になるときであるが、それをすべて決めることを実行し、測多価群の特定と合わせて結果をまとめることができた。これは、M. Kato (琉球大学) との共同研究である。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 11 件)

- (1) M. Kato & T. Sasaki, The hypergeometric differential equation  ${}_3E_2$  with cubic curves as Schwarz images, to appear in Kyushu J. Math. 64(2010). 査読有
- (2) T. Koike, T. Sasaki & Masaaki Yoshida, Asymptotic behavior of the hyperbolic Schwarz map at irregular singular points, Funkcialaj Ekvacioj, in press, 2010. 査読有
- (3) T. Sasaki & M. Yoshida, Singularities of flat fronts and their caustics, and an example arising from the hyperbolic Schwarz

map of a hypergeometric equation, Results in Math. 56(2009), 369–385. 査読有

- (4) T. Sasaki & M. Yoshida, Surface singularities appeared in the hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric equation, Lecture Notes of the Summer School “Arrangements, Local Systems and Singularities,” Progress in Math. 283(2009), 247–272. 査読有
- (5) K. Saji, T. Sasaki & M. Yoshida, Hyperbolic Schwarz map of the confluent hypergeometric differential equation, J. Math. Soc. Japan 61(2009), 559–578. 査読有
- (6) T. Sasaki & M. Yoshida, Hyperbolic Schwarz maps of the Airy and the confluent hypergeometric differential equations and their asymptotic behaviors, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 15(2008), 195–218. 査読有
- (7) T. Sasaki, K. Yamada & M. Yoshida, The hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation, Experimental Math. 17(2008), 269–282. 査読有
- (8) T. Sasaki, K. Yamada & M. Yoshida, Derived Schwarz map of the hypergeometric differential equation and a parallel family of flat fronts, International J. Math. 19(2008), 847–863. 査読有
- (9) M. Noro, T. Sasaki, K. Yamada & M. Yoshida, Confluence of swallowtail singularities of the hyperbolic Schwarz map defined by the hypergeometric differential equation, Experimental Math. 17(2008), 191–204. 査読有
- (10) T. Sasaki & M. Yoshida, Interpolation on Markoff transformations on the Fricke surface, Tohoku Math. J. 60 (2008), 23–36. 査読有
- (11) T. Sasaki & M. Yoshida, Homogeneous two-manifolds with an invariant two-form, Journal of Geometry 88(2008), 149–161. 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- (1) 佐々木 武, 射影極小曲面の幾何, “複素幾何 2010(Mabuchi 60),” 2010 年 3 月 19 日, 大阪大学.
- (2) 佐々木 武, *The hyperbolic Schwarz map for the Gauss hypergeometric differential equation*, “多変数関数論冬セミナー,” 2009 年 12 月 19 日、岐阜大学.
- (3) T. Sasaki, *Hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation*, “Geometry and arithmetic around hypergeometric functions,” 2008 年 10 月 2 日, Math. Forsch. Oberwolfach, Germany.
- (4) T. Sasaki, *Singularities of the hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation*, “Colloquium on Differential Geometry,” 2008 年 9 月 25 日, Univ. Granada, Spain.
- (5) T. Sasaki, *Geometry of the hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation*, “Conference on Differential Geometry,” 2008 年 6 月 23 日, Math. Inst. Bedlewo, Poland.
- (6) 佐々木 武, 射影極小曲面の楽しみ, “福岡・札幌幾何学セミナー,” 2008 年 2 月 21 日, 22 日, 九州大学.
- (7) 佐々木 武, 凸領域の幾何 — アフィン微分幾何の方法, “計算による数理科学の展開,” 2008 年 1 月 11 日, 神戸大学.
- (8) T. Sasaki, *Hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation III, IV*, “Arrangements, Local Systems and Singularities,” 2007 年 6 月 11 日, 12 日, Galatasaray University, Turkey.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~sasaki>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐々木 武 (SASAKI TAKESHI)

神戸大学・自然科学系先端融合研究環・名誉教授

研究者番号: 00022682