様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２４日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：19540090
研究課題名（和文）　角速度に関する回転集合について

研究課題名（英文）　On rotation sets for angular velocity

研究代表者
中山　裕道（NAKAYAMA HIROMICHI）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：30227970

研究成果の概要（和文）：
軌道に沿って接ベクトルがどのくらいひねられているかで，周期点を探すことを目的とした．その結果，速さと微分のひねりから周期点の存在を示し，また，連結な極小集合を位相幾何学的に分類した．更に，極小集合上での角度変化の特徴付けも行った．主要な結果としては，次の定理を証明したことである（松元重則氏との共同研究）；球面の向きを保つ同相写像における連結な（1 点でない）極小集合は，不変な補集合をちょうど 2 個もち，その他の補集合では遊走的になる．

研究成果の概要（英文）：
The purpose of this study is to find periodic orbits by examining the twist of the tangent vectors along the orbits. I showed the existence of periodic orbits from the velocity and the infinitesimal twist, and also classified connected minimal sets from the topological points of view. Furthermore I characterized the variation of angles along the orbits in minimal sets. As a main result, I proved the following theorem (a joint work with Shigenori Matsumoto); "Let f be an orientation preserving homeomorphism of the sphere which has a nontrivial continuum as a minimal set. Then there are exactly two invariant domains in the complement of the minimal set and all the other domains are wandering."

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：トポロジー，力学系理論
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分トポロジー，力学系

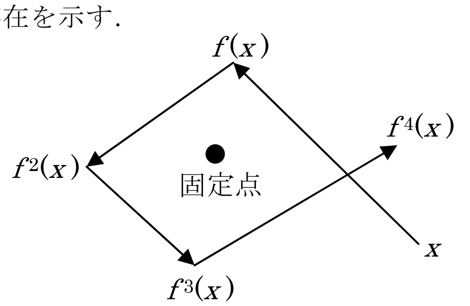
１．研究開始当初の背景

力学系理論では，ポアンカレにより創始された当時から，固定点や周期点の存在を示すことが本質とされてきた．例えば，Seifert により提案された「３次元球面の非特異流は周期軌道を持つか」という問題はザイフェルト予想と呼ばれ，半世紀以上にわたる多岐の研究の結果，1990年代にようやくKuperberg により反例が構成されるにいたった．

固定点や周期点を見つける方法として，これまでに様々な方法が開発されてきている．本研究では，新たな視点として，角速度に関する回転性に着目し，これを用いて，周期点の存在を考えることを提唱する．

２．研究の目的

周期点の存在を示すために，１次元力学系では，平均移動距離（回転数）を計算し，それが有理数になるか，または，無理数になるかで周期点の存在を調べた．しかし，２次元以上の力学系においては，有効な道具が発見されていない．そこで，本研究では，軌道に沿って接ベクトルがどのくらいひねられているかで，周期点を探す．軌道の進み方が遅く，かつ，強くひねられている場合には，固定点を持つと予想される．これは，ちょうど“台風の目”を探すのに似ている．強くひねられているところに目があるわけで，この目が力学系の固定点にあたる．そこで，軌道に沿って微分がどのくらい回転しているかを回転集合により評価することで，その固定点（あるいは，周期点）の存在を示す．



２．研究の方法

本研究では，角速度に関する回転集合を定義し，周期点の存在を証明することを目的としている．このために，周期点を遠巻きに巻く軌道を見つけ，それで空間を区切ることで，不動点定理に持ち込むことを計画している．限られた空間は，その中に極小集合を持つ．そこで，次の３つの方向；

軌道の閉じ込め，

連結な極小集合の位相幾何学的分類，

極小集合上での角度変化

で研究を進める．

(1)軌道の閉じ込め

ある点を遠巻きに巻く軌道が見つかると，それで空間を区切ることができ，不動点定理に持ち込むことができる．一般には，巻きが不完全なため，逃げ出す軌道があり，不動点を持たないことが起こる．そこで，どのくらい強くひねられているかが問題になる．

軌道に沿ったひねりについては，Calabi 不変量や Arnold 不変量など，いくつかの量が知られている．本研究では，接ベクトルのひねりに関するRuelle不変量をターゲットとすることを計画した．

これまでに，松元氏との共同研究の中で，トーラスの微分同相写像は Ruelle不変量が 0になる不変測度を持つという結果を得ている．これを示すために，その論文の中で，全ての点で接ベクトルがひねられることは起きないことを証明している．これは，接ベクトルがひねられるならば周期点を持つかという本研究の問題定義と密接に関連している．この点で，Ruelle不変量を考えることにした．

等角かどうかが重要な意味を持つ力学系理論では，角速度が重要な役割を担うと考える．実際，Sullivan により擬等角性が満たされれば，可測リーマン写像定理により，等角性が成り立ち，力学系としての分類が完成している．角度がつぶれる状態での，接ベクトルのひねりを調べることになる．

他方，回転集合についても，研究を進める．回転集合は，円周の微分同相写像の回転数，トーラスの回転集合，区間写像の回転集合と進歩し，現在，新しい展開を待っているところである．Misiurewicz は，回転集合の一般化として， displacement関数の積分を提唱し，この一般化が完備であるとき，回転集合は有用であると言っている．そこで，角速度を用い完備な回転集合を定義する．

(2)連結な極小集合の位相幾何学的分類

　これまでの研究で，極小集合が局所連結な場合については，その分類を得ている．そこで，本研究では，局所連結でない場合について考えることにする．

　具体的には，連結極小集合が分解不可能かどうかを調べる．一般位相空間論の世界では，連続体が分解不可能かどうかという問題は本質的とされている．

　特に，等質な分解不能連続体の研究は非常に古くから研究されており，分類がほとんど完成する状態にまでいたっている．もっとも，ここ５０年は分類が進展しておらず，膠着状態にあるが，それも，ある意味，完成度が非常に高い分野だからであるともいえる．そこで，連結極小集合の研究に，その成果を利用する．

(3)極小集合上での角度変化

　極小集合が擬円周になる場合について，軌道に沿った角度変化を研究する．ハンデルは，平面の微分同相写像で，その極小集合が擬円周と呼ばれている集合になる例を初めて構成した．しかし，その後，新しい例は見つかっていない．

　そこで，ハンデルの例に本質的な特徴があると考え,その射影流の力学系を考察し，角度変化の特徴を調べる．

４．研究成果

研究計画に従い，軌道の閉じ込め，連結な極小集合の位相幾何学的分類，極小集合上での角度変化について研究し，次の結果を得た．

(1)軌道の閉じ込め

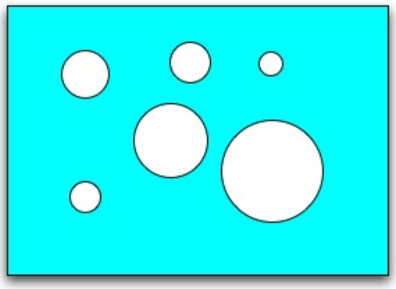
　２階微分と例外極小集合の関係について研究した．台風がいつ目を持つかを考える．台風がゆっくりと動き，強く回転すれば目ができる．一方，速く動き，ゆるく回転すれば目を持ち得ない．これを極小集合を用いて表現することを試みた．台風の回転は２階微分で表されるため，２階微分と固定点の存在との関係について研究することとなった．その結果，速さと微分のひねりから周期点の存在を示せた．これを論文にし，雑誌に掲載された（雑誌論文①）．

(2)連結な極小集合の位相幾何学的分類

　これについては，一般位相幾何学の等質性という観点とツイスト写像という観点の両面から研究を行った．

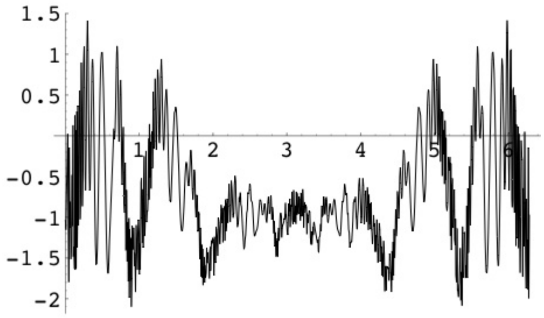
　これまでに，ビシとバルチャックとの共同研究で，曲面の同相写像における局所連結な極小集合の分類を行い，特に，局所切断点を持たない局所連結な極小集合がシェルピンスキー・カーペットを貼り合わせてできる集合と同相であることを証明した．

　本研究では，初期の試みとして，軌道に沿って遊走領域を埋め込む方法について考えた．Aart-Oversteegen は，極小な２次元多様体上の微分同相写像について，１本の軌道にそって，無限個の円板を埋め込んでいき，補集合が遊走領域になるような極小集合を持つ同相写像の構成法を開発した．ここで，同相写像ではなく，微分同相写像を仮定するのは，角度を使うからである．そこで，角度がどのくらい有用かを見るために，群作用について上の結果が成り立つかを調べた．その結果，群作用についても，射影極限を注意深く取ると，１つの軌道に沿って，遊走領域を埋め込めることが証明できた．



　次に，連結な例外極小集合が，分解可能であるかについて研究した．ここで，分解可能であるとは，その集合が２つの連続体の和集合になっているときをいう．

　特に本研究では，平面の同相写像における力学系について，その連結極小集合の位相幾何学的な性質を調べた．極小集合では，すべての軌道が稠密になる．従って，どの点から動き始めても，極小集合のあらゆる点の近くを軌道が通過する．この点で，極小集合は（位相空間論の）等質性に非常に近い性質を持つと思われる．一方，位相空間論では非常に長い年月等質性について研究がなされてきた．特に，平面に埋め込まれた等質的な連続体の研究は非常に進んでいる．この研究を踏まえ，平面の同相写像における極小集合の位相的な特徴付けを行おうと試みたところ，結果として，逆に，極小性と等質性に違いをあらわすいくつかの結果を得た．



極小集合だが，等質でない例

一方，ツイスト写像に関連して，次の結果を得た．

「球面の向きを保つ同相写像における連結な（1点でない）極小集合は，不変な補集合をちょうど2個もち，その他の補集合ではワンダリングになる」

（松元重則氏との共同研究，“Continua as minimal sets of homeomorphisms of S^2”，投稿中）．

アニュラスの力学系で，両境界で逆方向にひねられている同相写像をツイスト写像という．これは，支点を上下に動かす振り子などの数学モデルになっている．動的ハミルトニアンの難しさを説明するときに，よく用いられ，およそ１００年前のポアンカレやバーコフの時代から研究され，複雑な力学系が生じる本質であると考えられてきた．しかし，いまだに未解決の部分をたくさん含んでいる．

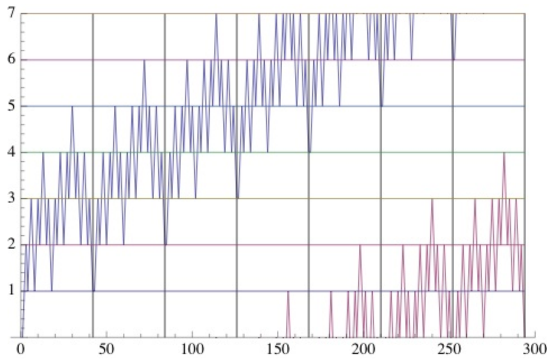
上記の論文では，ツイスト条件を連結な極小集合という設定に変えても，不変補集合をちょうど2つ持ち，ツイスト写像と同様な状況になることを示している．

証明には，補集合のプライムエンドを使った．球面の単連結開集合には，カラテオドリの理論により，プライムエンドを境界に貼り付けることができ，閉円板に拡張することができる．いま球面の単連結開集合上に同相写像が与えられると，同相写像が閉円板にまで拡張される．このとき，境界に誘導される同相写像から回転数が計算される．境界ごとに回転数が異なる状況がツイスト条件に対応する．上記の研究では，連結極小集合の補集合における回転数が０でないことを示し主定理を証明している．

(3)極小集合上での角度変化

球面の同相写像における連結な極小集合としては，ハンデルの例がよく知られている．この例における極小集合は擬円周と呼ばれるもので（右上図），連続体の中でもっとも難しいものである．一方，ハンデルの発見から３０年たつものの，円周とハンデルの例以外に(平面的)連結極小集合は見つかっていない．そこで，これら以外には無いのではないかと予想されている．

擬円周はいたるところで曲がっている“異常な空間”で微分構造はない．しかし，この上に微分同相写像があるという不思議な現象が起きる．そこで，この例について，角度変化を研究した．その結果，微分同相写像の明確な構成法，非デイスタル性の証明，射影流の極小集合の特徴付けを得た．



擬円周のグラフィック

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① H. Nakayama, A lower estimate of the movement for twisted toral diffeomorphisms. Int. J. Pure Appl. Math. 42--3 (2008), 421-426, 査読有.

② A. Bi's, H. Nakayama and P. Walczak, Modelling minimal foliated spaces with positive entropy, Hokkaido Math. J., 36--2 (2007), 283-310, 査読有.

③ H. Nakayama, Fiberwise divergent orbits of projective flows with exactly two minimal sets, Pacific J. Math., 229--2 (2007), 469-483, 査読有.

〔学会発表〕（計２件）

① H.Nakayama,2007 年 8 月 14 日，国際研究集会「the Forth International Conference of Applied Mathematics and Computing」 (Plovdiv, Bulgaria, August 12-18, 2007)
にて，
「Infinitesimal behavior of 2-dimensional dynamical systems」

② 中山　裕道, 2007 年 7 月 6 日 物理・数理学科コロキウム（青山学院大学）にて,「余次元２例外極小集合を持つ力学系について」

〔その他〕
ホームページ等
http://www.gem.aoyama.ac.jp/~nakayama/

６．研究組織

(1) 研究代表者
中山　裕道（NAKAYAMA HIROMICHI）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：３０２２７９７０

(2)研究分担者
松元　重則（MATSUMOTO SHIGENORI）
日本大学・理工学部・教授
研究者番号：８００６０１４３
（H20→H21：連携研究者）

稲葉　尚志（INABA TAKASHI）
千葉大学・理学研究科・教授
研究者番号：４０１２５９０１
（H20→H21：連携研究者）