

平成 22 年 5 月 31 日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540092
 研究課題名（和文） 群上のMarkov-Zariski位相の構造とコンパクト型位相群の収束性質の研究

研究課題名（英文） Study of the structure of the Markov-Zariski topology of a group and convergence properties of compact-like topological groups

研究代表者

D.B. Shakhmatov (SHAKHMATOV DMITRI B.)
 愛媛大学・理工学研究科・教授
 研究者番号：90253294

研究成果の概要（和文）：可換群のMarkov位相とZariski位相が一致することを証明し、可換群のMarkov-Zariski位相の構造を解明した。非可換群のMarkov位相とZariski位相が一致するための必要十分条件を得た。連続体濃度以下の濃度をもつ可換群Gの部分集合があるG上のHausdorff群位相で稠密であるための必要十分条件を得た。また、ねじれない可換群又はdivisible可換群の非可算部分集合についても同様な結果を得た。

研究成果の概要（英文）： We prove that Markov and Zariski topologies coincide for abelian groups, and we provide the description of the Markov-Zariski topology of an abelian group. Based on this description, we characterize countable potentially dense subsets of abelian groups of size at most the continuum, as well as uncountable potentially dense subsets of torsion and divisible abelian groups. We also find a necessary and sufficient condition for the coincidence of Markov and Zariski topologies in the non-commutative case. The theory of group-valued function spaces is developed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：トポロジー, 代数学, 位相群, コンパクト, 収束性

1. 研究開始当初の背景

(1) Gを群とする。自然数n、Gの元 g_1, g_2, \dots, g_n と $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$ に対して、集合 $\{x \in G : x_1^{a_1} g_1 x_2^{a_2} g_2 \dots x_n^{a_n} g_n = 1\}$ をGの基本代数的集合と呼び、有限個の基本代数的集

合の和集合をGの代数的集合という。(ただし、1はGの単位元を表す。) 群Gのすべての代数的集合が閉集合になるようなG上の最弱位相をGのZariski位相(または、verbal位相)という。群のZariski位相がMarkov(1946)による導入され、Bryant

(1977), Baumslag, Myasnikov, Remeslennikov (1999) により研究された。

(2) Markov (1946)による、群 G 上のすべての Hausdorff 群位相で閉集合になる集合を G の無条件閉集合と呼ぶ。群 G のすべての無条件閉集合が閉集合になるような G 上の最弱位相を G の Markov 位相という。

(3) 群の Zariski 位相と Markov 位相は共に T_1 位相であるが特別な場合を除いて、Hausdorff ではない。また、代数的集合は必ず無条件閉集合であるため、Zariski 位相は Markov 位相より弱い。Markov (1946)は任意の可算群 G の Zariski 位相と Markov 位相が一致することを示し、非可算群の場合でも、その二つの位相が一致するか否かを未解決問題として提出した。反例が Hesse (1979) により得られている。

(4) Markov (1946) により、群 G 上のある Hausdorff 群位相での稠密な部分集合を G の稠密可能な部分集合 (potentially dense 集合) と呼ぶ。Markov (1946)は稠密可能な部分集合の特徴付け問題を提出した。

2. 研究の目的

(1) 群の Zarsiki 位相と Markov 位相が一致するための必要十分条件を得ること。(Markov の問題)

(2) 可換群の Zarsiki 位相と Markov 位相の構造の解明。

(3) 可換群の potentially dense 集合の特徴付けを得ること。(Markov の問題)

(4) コンパクト型位相群の収束性質の特徴を解明する。

3. 研究の方法

(1) 愛媛大学内で定期的にゼミを開催し共同研究を進めた。

(2) 海外共同研究者とは日常的に電子メールで意見交換を行った。

(3) 海外共同研究者と年1回相互に訪問し、共同研究を実施した。

4. 研究成果

(1) 群上の Markov 位相と Zariski 位相が一致するための必要十分条件を得た。この条件を用いて、可換群の場合は、Markov 位相と Zariski 位相が一致することを証明した。

(2) 可換群 G の部分集合 A が与えられたとき、 A の Markov-Zariski 閉包と位相 T における A の閉包は一致するような G 上の precompact 群位相 T を構成した。

(3) 可換群の Markov-Zariski 位相の位相的性質を解明した。特に、Markov-Zariski 位相は hereditarily separable かつ Frechet-Urysohn 空間であることを証明した。また、可換群の任意の部分集合の Markov-Zariski 閉包を計算した。

(4) 可換群 G の濃度が連続体の濃度以下であるとし、 G の部分集合からなる可算な族 S を考える。族 S に属する各集合 A に対して、 A の Markov-Zariski 閉包と位相 T における A の閉包は一致するような G 上の群位相 T が存在することを証明した。また、 (G, T) の完備化がコンパクト位相群になるような T を構成した。

(5) 可換群 G の稠密可能な部分集合 A の性質を解明した。

① G の濃度は連続体濃度 c 以下であるとき、 G の可算部分集合 A は G で稠密可能であるための必要十分条件は A の Markov-Zariski 閉包は G と一致することである。

② G はねじれない可換群又は divisible 可換群であるとき、 G の非可算部分集合が G 上のある群位相で稠密になるための必要十分条件を得た。

(6) 任意の minimal 可換位相群の weight と濃度の関係を明確にした。可換自由群上の minimal 擬似コンパクト群位相が存在するための必要十分条件を得た。ねじれない可換群上の minimal 局所連結な群位相が存在しないことを示した。

(7) Comfort, Hernandez, Macario, Raczkowski, Trigos-Arrieta の問題を解決し、可換コンパクト群 G の weight と G の determined 部分群の最小の濃度が一致することを示した。この定理を用いて、「コンパクト群 G のすべての稠密な部分群が G を determine する場合は、 G は距離付け可能である」という結果の簡単な証明を得た。

(8) 与えられた位相空間 X と位相群 G に対し、 X から G への連続関数全体の集合上に点列収束位相 (すなわち、チコノフ積位相) を導入したときの位相群 $C_p(X, G)$ の位相的及び代数的な性質を調べた。NSS 群 (単位群以外の部分群を含まない単位元の開近傍をもつ位相群) に関する概念 (TAP 群) を導入し、任位の NSS 群 G に対し、「 G -正規空間 X は擬似コンパクトであるための必要十分条件は $C_p(X, G)$ は TAP 群であること」、「 G^* -正規空間 X はコンパクトであるための必要十分条件は $C_p(X, G)$ は加算 tightness をもつ TAP 群であること」を示された。特に、擬似コンパクト性質とコンパクト性質が (G^* -正規空間における) G -同値関係で保たれていることを得た。

(9) 連続選択関数の存在定理 (Michael 定理) を用いて、局所コンパクト位相群の suitable set を構成した。

(10) 可換群の Bohr 位相を用いて、 σ -コンパクトであるが1つのコンパクト部分集合で生成できない可換群の例を挙げた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

- ① D. Dikranjan; D. Shakhmatov, The Markov-Zariski topology of an abelian group, *Journal of Algebra*, 印刷中, 査読有
- ② D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Hewitt-Marczewski-Pondiczery type theorem for abelian groups and Markov's potential density, *Proceedings of the American Mathematical Society* 138 (2010), 2979-2990, 査読有
- ③ D. Shakhmatov; J. Spevak, Group-valued continuous functions with the topology of pointwise convergence, *Topology and its Applications* 157 (2010), 1518-1540, 査読有
- ④ D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Quasi-convex density and determining subgroups of compact abelian groups (with D. Dikranjan), *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 363 (2010), 42-48, 査読有
- ⑤ V. Gutev; T. Nogura, Weak orderability of topological spaces, *Topology and its Applications*, 157 (2010) 1249-1274, 査読有
- ⑥ V. Gutev; T. Nogura, Set-maximal selections, *Topology and its Applications*, 157 (2010), 53-61, 査読有
- ⑦ H. Fujita; T. Matrai, On difference property of Borel measurable functions, *Fundamenta Mathematicae*, 208 (2010), 57-73, 査読有
- ⑧ D. Dikranjan; A. Giordano Bruno; D. Shakhmatov, Minimal pseudocompact group topologies on free abelian groups, *Topology and its Applications*, 156 (2009), 2039-2053, 査読有
- ⑨ D. Shakhmatov, Building suitable sets for locally compact groups by means of continuous selections, *Topology and its Applications*, 156 (2009), 1216-1223, 査読有
- ⑩ S. Dolecki; H. Kunzi; T. Nogura, Weak regularity and consecutive topologizations and regularizations of pretopologies, *Topology and its Applications*, 156 (2009) 1306-1314, 査読有
- ⑪ D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Reflection principle characterizing groups in which unconditionally closed sets are algebraic, *Journal of Group Theory*, 11 (2008), no. 3, 421-442, 査読有
- ⑫ D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Abundance of sigma-compact non-compactly generated groups witnessed by the Bohr topology of an abelian group, 数理解析研究所講究録, 一般及び幾何学的トポロジーの現状と諸問題, 1578 (2008), 16-18, 査読無
- ⑬ S. Garcia-Ferreira; V. Gutev; T. Nogura, Extensions of 2-point selections, *New Zealand Journal of Mathematics*, 38 (2008), 1-8, 査読有
- ⑭ V. Gutev; T. Nogura, Selections and totally disconnected spaces, *Topology and its Applications*, 155 (2008) 824-829, 査読有
- ⑮ V. Gutev; T. Nogura, Weak selections and flows in networks, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 49 (2008), 284-289, 査読有
- ⑯ H. Fujita, Remarks on two problems by M. Laczko on functions with Borel measurable differences, *Acta Mathematica Hungarica*, 117 (2007), 153-160, 査読有
- ⑰ G. Di Maio; Lj Kocinac; T. Nogura, Convergence properties of hyperspaces, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44 (2007) 845-854, 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- ① D. Shakhmatov, Hewitt - Marczewski - Pondiczery type theorem for abelian groups and Markov's potential density, The 24th Summer Conference on Topology and its Applications, Brno, Czech Republic, 2009年7月17日 (招待講演)
- ② D. Shakhmatov; J. Spevak, Group-valued continuous functions with the topology of point-wise convergence, 大44回位相空間論シンポジウム (島根大学) 2009年5月31日
- ③ T. Nogura, Selections and Dimension, 大44回位相空間論シンポジウム (島根大学) 2009年5月30日
- ④ D. Shakhmatov, Strong S and L groups, *Advances in Set-Theoretic Topology* (Centre "Ettore Majorana", Erice, Italy) 2008年6月18日
- ⑤ H. Fujita, A partial answer to a problem of M. Laczko concerning the difference property of Borel measurable functions, *Advances in Set-Theoretic Topology* (Centre

“Ettore Majoranana”, Erice, Italy)
2008年6月18日

- ⑥ T. Nogura, Continuous selections and Dimensions, Advances in Set-Theoretic Topology (Centre “Ettore Majoranana”, Erice, Italy) 2008年6月9日 (招待講演)
- ⑦ D. Shakhmatov, Solutions to 1944 problems of Markov, International Conference on Topology and its Applications 2007, 京都大学, 2007年12月5日 (招待講演)
- ⑧ T. Nogura, Selections and Dimensions, 22th Summer Conference on Topology and its Applications, Castellon, Spain 2007年7月25日 (招待講演)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

本研究の成果を以下のホームページで公開
されている。

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~dima/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

D. B. Shakhmatov (SHAKHMATOV
DMITRI)

愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90253294

(2) 研究分担者

野倉 嗣紀 (NOGURA TSUGUNORI)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号：00036419

藤田 博司 (FUJITA HIROSHI)
愛媛大学・理工学研究科・講師
研究者番号：60238582