様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　６月　４日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007 ～ 2009
課題番号：19540095
研究課題名（和文）　写像空間，配置空間，分類空間とホモトピー（余）極限

研究課題名（英文）　Function Spaces, Configuration Spaces, Classifying Spaces and Homotopy (Co)limits

研究代表者
佃　修一（TSUKUDA SHUICHI）
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：50305182

研究成果の概要（和文）：蜘蛛のような形をしたマシンが足先を固定されているときにとることの出来る状態のなす配置空間のおおよその形(安定ホモトピー型)を，いくつかの場合に決定した．またゲージ群とよばれる空間の，素数 p ごとに決まるおおよその形(p で局所化したホモトピー型)をいくつかの場合に決定した．

研究成果の概要（英文）：We determined the stable homotopy type of the configuration space of certain arachnoid mechanisms. We also studied the p local homotopy type of certain gauge groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何学

１．研究開始当初の背景
研究開始当初，ホモトピー余極限を用いることである種のマシンの配置空間のホモトピー型を決定することが出来ていたが，このホモトピー余極限を用いる手法は極めて有効であったためさらに研究をおしすすめることが望ましかった．またゲージ群の分類空間は多様体からリー群の分類空間への写像空間のホモトピー型をもつが，この空間のコホモロジーについては満足のいく計算結果が知られていなかった．

２．研究の目的
写像空間，特にゲージ群の分類空間，およびこれと関係の深い配置空間をホモトピー代数の手法を用いてホモトピー論的側面か

ら調べる．
３．研究の方法
写像空間，特にゲージ群の分類空間については関手の微分を利用したホモトピー代数的手法と，ファイバーワイズホモロジーを用いた方法の二つの方法で取り組む．
またマシンの配置空間をホモトピー余極限を用いた手法で調べる．この方法では，ホモロジー等を計算することなく直接，配置空間のホモトピー型を簡明に記述することが可能である．
４．研究成果
(1) 基点つき位相空間の間の写像

$$X_k(0) \to X_k(1), k = 1, \dots, n$$

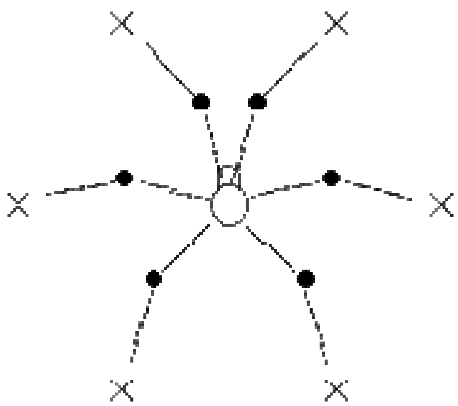
に対しそれらの直積を用いて，n 点集合のべき集合の部分集合Ｐから位相空間の圏へのある関手Fが自然な仕方で，すなわち，$J \in P$に対し

$$F(J) = \prod_{k=1}^{n} X_k(\,X(J,k))$$

と定めることにより構成される． ただし$X(J,k)$は特性関数である．この関手のホモトピー余極限の懸垂はいくつかの空間の一点和に自然に分解する．各成分は各$X_k(0) \to X_k(1)$と，べき集合の部分集合 P の情報から定まる関手のホモトピー余極限の懸垂として表される．詳しくいうと，各$I \subset \{1, \dots, n\}$に対して定まる関手

$$F_I(J) = \bigwedge_{k \in I} X(J,k))$$

の基点付きホモトピー余極限とＰの分類空間の一点和の懸垂となる．Ｐが特別な場合にはこの各成分のホモトピー型を具体的に記述することが出来る．



これを用いて，琉球大学の神山氏と共同で，図のような，関節がひとつあるｎ本の足が中心で結合されている（蜘蛛のような形をした）マシンが足先を正多面体の頂点に固定されているときにとることの出来る状態のなす配置空間の（安定）ホモトピー型を，足が短い場合に決定することが出来た．具体的には正多面体 P が d 次元空間内にある場合，$V = \{v_1, \dots, v_n\}$をその頂点の集合とすると，足の長さａのマシンの配置空間は

$$\{\,(p_1, \dots, p_n, q) \mid \| p_i - v_i \| \ = \| q - p_i \| = \frac{a}{2}, \forall i\ \} \subset \left(R^d\right)^{\{n+1\}}$$

により与えられる．ａがＰの半径と直径の間にあるときに足が短いという．
d が４以上の場合，足が短いマシンの配置空間のホモトピー型は

$$\bigvee_{\emptyset \neq I \subset V} S^{\{|I|(d-2)+d-3\}} \wedge S(I^{\Delta})$$

で与えられる．ここで$S(I^{\Delta})$はＰの双対多面の，Ｉ に含まれる頂点に対応する面の和集合I^{Δ}の非約懸垂である．さらにこの各成分はいくつかの球面の一点和になっており，その次元と個数を陽に記述できる．ｄが３の場合は一度懸垂すると同様に分解する．
足が長い場合は，さらにいくつかの技術的な計算を行って，ホモロジー群を決定することが出来た．これらを具体的に計算する

際にはコンピュータを用いた計算が必要であった.
なお，ほぼ同時期に上記の関手と同様な polyhedral product functor という関手が Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler によって考察され，その後も活発に研究されている.

(2) 上記の n 点集合のべき集合の部分集合Pから位相空間の圏への多面体的直積関手のホモトピー余極限を用いることで，位相空間の sectional category の Whitehead タイプの定義を与え，これを用いて位相的複雑性の考察を行った.
この内容に関しては引き続き研究を継続中である.

(3)ゲージ群のホモトピー型について，京都大学の河野氏と共同で以前から続けていた古典群の普遍束の随伴束を，ファイバーワイズに，素数 p で局所化したものがどの程度自明であるかについての研究を論文 ``Notes on the Triviality of Adjoint Bundles''
にまとめた.
G をコンパクト連結リー群，B を有限 CW 複体，$P \to B$ を B 上の主 G 束とする．P の随伴束

$$\mathrm{AdP} = P \times_G G$$

はファイバー毎の積によりファイバーワイズ H 空間（ファイバーワイズ群）となる．よく知られているようにその切断全体はポイントワイズな積により位相群となるが，自然に P のゲージ群と同一視される．ゲージ群を有理化したものは自明束のゲージ群とループ空間としてホモトピー同値になることは容易にわかるが，Crabb-Sutherland は随伴束のレベルで，ファイバーワイズに有理化したものが自明となることを示した．この研究において我々は，素数 p が十分大きければ，P の随伴束をファイバーワイズに p で局所化したものが，自明なものとファイバーワイズ H 空間としてファイバーワイズホモトピー同値となることを示した．特に，B 上の主 G 束 P のゲージ群を十分大きな素数 p で局所化したものは H 空間として Map(B,G)を p で局所化したものとホモトピー同値となる．例として X が４次元閉多様体であるとき X 上の主 SU(2)束 P のゲージ群を p で局所化したものは，p が５以上ならば$\mathrm{Map}(X,SU(2))$を p で局所化したものと H 空間としてホモトピー同値である．G が p 正則，すなわち

$$G \simeq_p S^{2n_1-1} \times \ldots \times S^{2n_l-1}, n_1 \leq \cdots \leq n_l$$

である場合は上記の素数 p と，底空間 B の次元との関係を陽に記述することが出来る，すなわち

$$\dim B < 2(p - n_l + 1)$$

であれば随伴束は自明となる．さらに， p が奇素数で，G が非可換な古典群（ただし SU(p)を除く）の場合は上記の結果が最適である，すなわち

$$\dim B = 2(p - n_l + 1)$$

のときには，普遍束を$2(p - n_l + 1)$スケルトンに制限したものの随伴束はファイバーワイズ p 局所的に自明にならない.
なおこの論文は２０１０年８月アメリカ数学会から出版予定の
Homotopy Theory of Function Spaces and Related Topics,
Contemporary Mathematics vol 519
に掲載予定である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）
(1) A.Kono and S.Tsukuda, Notes on the Triviality of Adjoint Bundles, Homotopy Theory of Function Spaces and Related Topics, Contemporary Mathematics, 査読有, vol 519, (2010) 掲載予定

(2) Y.Kamiyama and S.Tsukuda, On the homology of configuration space of arachnoid mechanisms, Houston Journal of Math. 査読有, vol 34, (2008), 483--499

〔学会発表〕（計　３件）
(1) S.Tsukuda, On the configuration space of a certain n-arms machine in the Euclidean space, MFO Workshop: Homotopy Theory of Function Spaces and Related Topics, 2009 年 4 月, MFO（ドイツ）

(2) S.Tsukuda, A survey on the homotopy types of gauge groups and their classifying spaces, MFO Workshop: Homotopy Theory of Function Spaces and Related Topics, 2009 年 4 月, MFO（ドイツ）

(3) S.Tsukuda, On the Configuration Space of a Certain n-arms Machine in the Euclidean Space, 第２回東アジア代数的位相幾何学シンポジウム, 2008 年 12 月, シンガポール大学（シンガポール）

〔図書〕（計　件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計◇件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
佃　修一（TSUKUDA SHUICHI）
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：50305182

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：