様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 4 月 10 日現在

研究種目：基盤研究（ C ）
研究期間：2007〜2008
課題番号：19540097
研究課題名（和文）　結び目と三次元多様体の体積予想

研究課題名（英文）　Volume conjecture for knots and 3-manifolds

研究代表者
横田　佳之　(YOKOTA YOSHIYUKI)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：40240197

研究成果の概要：ふたつの双曲ピースに分解される絡み目を構成し、その色つきジョーンズ多項式の極限を正確に計算し、一般化された体積予想が成立する例を初めて発見しました。この方法を使うと、一般化された体積予想が成立する例を無限個構成することもできます。また、双曲結び目の色つきジョーンズ多項式の極限に現れるポテンシャル関数が、体積だけでなく、チャーン・サイモンズ不変量を与えることを証明しました。同時に、ポテンシャル関数の変数の幾何学的な意味が明らかになったことで、ジッカートの公式が示唆している未知の量子 6j 記号が発見、四面体分割を通じた三次元多様体の新しい量子不変量の構成、体積予想の定式化に向けて、新しい方向性が見えてきました。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：トポロジー
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：結び目、三次元多様体、量子不変量、体積予想

１．研究開始当初の背景

ジョーンズ多項式の発見以来、結び目と三次元多様体の量子不変量の研究は急速に発展し、1990 年代後半には、少なくとも不変量の代数的な側面は研究され尽くした感がありました。

一方、量子不変量の幾何的な意味づけに関しては、量子力学における経路積分の考え方を用いた

E. Witten: Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121(1989), 351-399

が知られていますが、きちんとした数学的理論は未だに存在していません。

ところが、文献

R. Kashaev: The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm, Lett. Math. Phys. 39(1997), 269—275

において、数学的厳密さにはやや欠けるものの、量子二重対数不変量の漸近展開が結び目の補空間の体積を与える状況証拠が提出され、さらに文献

H. Murakami and J. Murakami: The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot, Acta Math. 186(2001), 85--104

において、三次元球面内の結び目に対する量子二重対数不変量とジョーンズ多項式が本質的に同じものであることが証明されました。ここから、ジョーンズ多項式の漸近展開と結び目の補空間の体積を結びつける、結び目の体積予想が定式化され、多くの研究者の注目を集めながら、現在に至っています。

筆者は９年前から結び目の体積予想の研究に取り組み、ジュネーブ大学のカシャエフ氏との共同研究で、色つきジョーンズ多項式をトーラス上の積分で表すことに成功すると同時に、被積分関数、いわゆるポテンシャル関数の臨界方程式と結び目の補空間の四面体分割から得られる構造方程式が一致することを発見しました。研究開始当初、積分値の漸近挙動の解析に際し、モース理論を用いた鞍点法が有効であることも発見し、結び目の体積予想の解決に一定の見通しをつけることができたと考えています。

そこでつぎの目標として、体積予想のさまざまな拡張が浮かび上がってきました。

２．研究の目的

最初の目標は、文献

R. Kashaev: A link invariant from quantum dilogarithm, Modern Phys. Lett. A 10(1995), 1409-1418

で導入された、三次元多様体に対する量子二重対数不変量を組織的に計算し、その漸近挙動から、体積やチャーン・サイモンズ不変量などの幾何的不変量を抽出することです。

量子二重対数不変量とは、古典二重対数関数の量子化である量子二重対数関数と、三次元多様体の四面体分割を経由して定義される位相不変量です。

古典二重対数関数が、三次元多様体の古典的な位相不変量である体積およびチャーン・サイモンズ不変量の記述に使われていることを考えると、体積およびチャーン・サイモンズ不変量から量子二重対数不変量への移行メカニズムの解明は、自然な研究対象だと思われます。

さらに量子二重対数関数とジョーンズ多項式の関係から、多くの研究者が目標としてきた、量子不変量の幾何的な特徴づけ、および量子不変量の低次元トポロジーへの本格的な応用が期待できます。

つぎの目標として、文献

J. Murakami: Colored Alexander invariant for framed links, Osaka J. Math. 45(2008), 541--564

で導入された、結び目の色つきアレキサンダー多項式から、三次元多様体の新しい量子不変量を構成して、その漸近挙動から、体積やチャーン・サイモンズ不変量などの幾何的不変量を抽出することです。

色つきアレキサンダー多項式には、色つきジョーンズ多項式にはないパラメータがあり、このパラメータを絡み目の経線の SL(2) 表現の固有値とみなすことで、絡み目の補空間の双曲構造の変形に関する情報を、完全に含んでいると期待されます。したがって、絡み目のデーン手術で得られる三次元多様体に対して、絡み目の色つきアレキサンダー多項式から、レシェティキン・トゥラエフの方法で、新しい量子不変量が定義できる可能性が十分にあります。

最後の目標として、村上斉・村上順によって提唱された、一般化された体積予想、すなわち、

「非双曲結び目の色つきジョーンズ多項式の極限には、グロモフ体積が現れる」

という予想の解決に向けて、非双曲結び目に対する色つきジョーンズ多項式の漸近挙動を解析することです。

結び目の補空間は、本質的トーラスによっていくつかの成分に分解され、それぞれに双曲多様体またはザイフェルト多様体の構造が入り、グロモフ体積は、その双曲多様体部分の体積の和であることが知られています。いまだ手つかずの、双曲多様体部分が二個以上ある場合に、色つきジョーンズ多項式の極限を調べることが目標です。

３．研究の方法

量子二重対数不変量は、三次元球面内の結び目以外に対しては、ほとんど計算されていません。そのため、まず組織的な計算実験を行い、データを収集する必要がありました。具体的には、少ない数の四面体に分割される三次元多様体を、

S. Matveev: Algorithmic topology and classification of 3-manifolds, Algorithms and Computation in Mathematics vol. 9

などを参考にして組織的に構成し、不変量の計算実験を二つの独立した方法、すなわちカシャエフ氏が得意とする量子ダイログ関数を使う方法と、村上氏が得意とする量子6jシンボルを使う方法とで行いました。計算が収束しない場合には、障害となる四面体分割の局所構造を解析し、四面体分割の局所変形などを経由して、計算に理想的な三次元多様体を再構成する作業を試みました。

量子ダイログ不変量の漸近挙動の解析には、量子ダイログ関数の積分表示と量子 6j シンボルの極限公式を利用し、結び目の体積予想の研究で得られたノウハウを駆使して行いました。計算が収束しない場合には、あらためて対称性の高い三次元多様体に注目し、不変量の代数的な対称性を利用することで、鞍点法を適用する際に生じる技術的問題を避ける工夫を試みました。

色付きアレキサンダー多項式に関しては、鏡像と同型なもろ手型結び目や、結び目の補空間とその鏡像をはりあわせて得られる三次元多様体など、幾何学的な対称性が高く、不変量が本質的に実関数で表される例に絞って解析し、鞍点法を適用する際に生じる技術的問題を避ける工夫を試みました。

また、色つきアレキサンダー多項式を導く量子群の表現から、三次元多様体の新しい不変量を定義するために必要な量子 6j 記号を、

A..N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin: Representationof the algebra Uq(sl(2)), q-orthogonal polynomials and invariants of links, Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups, 1989

の方法で抽出しようと試みました。

色つきジョーンズ多項式に関しては、8 の字結び目の補空間とボロミアン絡み目の補空間をはりあわせて得られる非双曲結び目とその変形族に対し、色つきジョーンズ多項式の極限を計算し、差分法を用いてその極限を解析しました。

最後に、

C. Zickert: The Chern-Simons invariant of a representation, preprint

の結果を受けて、色つきジョーンズ多項式から得られるポテンシャル関数と、結び目のチャーン・サイモンズ不変量の組合せ的な定義を比較する実験を行い、体積予想の研究で用いる四面体分割の特殊性がどう影響するかを観察しました。

４．研究成果

量子二重対数不変量の計算実験に関しては、結び目の色つきジョーンズ多項式のような自然な表現方法が発見できず、残念ながら鞍点法を適用して極限を計算する段階に至っていません。

色つきアレキサンダー多項式を導く量子群の表現から量子 6j 記号を抽出する試みは、表現の可約性に由来する問題をいまだ解決できず、これも未完成です。ただし、下記で述べるジッカートの公式との関連が期待できます。

8 の字結び目の補空間とボロミアン絡み目の補空間をはりあわせて得られる非双曲結び目とその変形族に対しては、色つきジョーンズ多項式をいくつかの部分和に分けることで、絶対値による評価と差分法をうまく適用し、その極限を正確に計算することができました。結果は予想通り、補空間のグロモフ体積、すなわち８の字結び目の補空間とボロミアン絡み目の補空間の体積の和が現れることを証明しました。これは、双曲多様体部分が二個以上ある場合に体積予想が成立する、はじめての例となります。

ジッカートによって与えられた、結び目のチャーン・サイモンズ不変量の組合せ的な定義を、体積予想の研究に登場する四面体分割に適用し、双曲結び目の色つきジョーンズ多項式の極限に現れる、ポテンシャル関数とチャーン・サイモンズ不変量の関係、およびポテンシャル関数の変数が持つ幾何学的な意味が明らかになりました。

ジッカートの公式は未知の量子 6j 記号の存在も示唆しており、四面体分割を通じた三次元多様体の新しい量子不変量の発見と、体

積予想の定式化に向けて、新しい方向性が見えてきました。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
①J. Cho, J. Murakami, Y. Yokota, The complex volumes of twist knots, Proc. Amer. Math. Soc.(to appear), 査読有り
②H. Murakami, Y. Yokota, The colord Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery spaces, J. reine angew. Math. 607, 47--68, 2007, 査読有り

〔学会発表〕（計４件）
①Y. Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Workshop on Turaev-Viro invariant and related topics, 2009 年 2 月 11 日, 東京工業大学
②Y. Yokota, On the limit of the Kashaev's invariants for some knots, A second time around the volume conjecture, 2007 年 5 月 31 日, Louisiana State University

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

横田　佳之（YOKOTA YOSHIYUKI）
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：40240197

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者

①村上順（MURAKAMI JUN）
早稲田大学・理工学術院・教授
②RINAT KASHAEV
ジュネーブ大学・数学教室・教授