様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年６月１０日現在

機関番号：３２６７８
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2010
課題番号：19540098
研究課題名（和文）ファノ多様体の組合せ論とその佐々木・アインシュタイン多様体への応用

研究課題名（英文）Combinatorics of Fano varieties and its application to Sasaki-Einstein manifolds

研究代表者
橋本　義武（HASHIMOTO YOSHITAKE）
東京都市大学・知識工学部・教授
研究者番号：20271182

研究成果の概要（和文）：グロタンディークの双二十面体に基づいて，通信理論における誤り訂正符号に用いられるゴレイ・コード，ウィット・デザインの構成を見直した．C2 有限頂点代数の共形場理論において，量子場の相互作用を記述するフュージョン積と因子化の定式化をおこなった．

研究成果の概要（英文）：Construction of Golay codes and Witt designs based on Grothendieck's bi-icosahedrons applied to error-correcting codes in communication theory. Formulation of fusion products and factorization in conformal field theory of C2 finite vertex algebras, which describes interaction of quantum fields.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

１．研究開始当初の背景

研究代表者は，物理学者（研究分担者の安井，阪口）と共同で，高次元カー・ブラックホールから構成されるコンパクト・アインシュタイン多様体の研究を進めていた．これらの多様体は，トーリック・ファノ多様体のシンプレクティック商の構成の途中にあらわれるものである．したがって，われわれのアインシュタイン多様体の構成とトーリック・ファノ多様体との関連を明らかにすることが重要であるとの認識に達した．
一方，ファノ多様体の組合せ論は，研究分担者の大場との共同研究の主題である，安定曲線のモジュライ空間のトポロジーとの関係が深い．たとえば，種数０，５点の安定曲線のモジュライは，２次元のファノ多様体になり，曲線の退化に対応する無限遠因子の交叉は，ペテルセン・グラフで記述される．これは，５次対称群から６次対称群への特殊な準同型に対応するものである．
そこで，以上の両方向を念頭におきつつ，ファノ多様体にあらわれる組合せ論についての研究に着手した．

２．研究の目的

(1) 高次元カー・ブラックホールの幾何学と，トーリック・ファノ多様体の理論の関連を明らかにすること．

(2) ファノ多様体の重要な例である種数０の５点つき安定曲線のモジュライの位相的形状の組合せ論を，グロタンディークの双二十面体の観点から理解し，さらに６点つきの場合のモジュライの組合せ構造を明らかにすること．
(3) 安定曲線のモジュライの位相的形状の組合せ論を研究するため，共形場理論の基礎理論を整備し，応用すること．特に頂点代数の表現のなすアーベル圏が半単純でない場合の共形場理論を展開する．まずフュージョン積，因子化の理論を整備する．

３．研究の方法
ブラックホール，佐々木・アインシュタイン多様体については，物理学者である研究分担者である安井との共同研究をおこなう．
安定曲線については，研究分担者である大場との共同研究をおこなう．
　共形場理論・表現論については，土屋昭博(IPMU)と共同研究をおこなう．また，そのために必要になるホモトピー代数的枠組みについて共同研究をおこなう．

４．研究成果
(1)グロタンディークの双二十面体の立場から，ゴレイ・コードを与えるウィット・デザイン（5-(12,6,1)デザイン，5-(24,8,1)デザイン）の構成を見直した．
n 点集合 X の k 点部分集合の族 B を考え，その元をブロックとよぶ．X の任意の t 点部分集合がちょうど v 個のブロックに含まれるとき，(X,B)を t-(n,k,v) デザインとよぶ．1-(n,2,v)デザインは v 価グラフである．1-(n,k,1)デザインは k 点部分集合の直和への分割である．
　２つの３点集合に対し，その間の全単射全体をパリティで分けると，別の２つの３点集合が得られる．この４つの３点集合は対等で，そのうちの２つの直積である９点集合はすべて同一視できる．この９点集合には自然な 2-(9,3,1)デザインの構造が入る．また，この４つの３点集合を２つずつ対にするしかたからなる３点集合を考える．４つの３点集合を合わせた 12 点集合と，これらに付随する９点集合と３点集合を合わせた 12 点集合には，5-(12,6,1)デザインの構造が入る．これらはたがいに双対であり，両者を合わせた 24 点集合には 5-(24,8,1)デザインの構造が入る．
　双二十面体とは，2-(6,3,2) デザインの相補的な対のことである．６点集合 X に対し，その上の双二十面体構造は６つある．その全体を X*と書くと，これは X の双対とよぶべきものである．X と X*の和 Y には，5-(12,6,1) デザインが自然に定義される．
X を 3+3 に分けるやり方と X* を 3+3 に分けるやり方の間には自然な全単射がある．これらは 10 点集合をなす．そのうちの１点を固定すると，Y は４つの３点集合に分割され，そのうちの２つの直積は，残りの９点と自然に同一視され，前に述べたものが現れる．この９点集合に前に述べた３点集合を加えてできる 12 点集合を Y*とする．Y, Y* には 5-(12,6,1) デザインの構造が入る．Y の２点が Y* のブロックの相補的な対に１対１対応し，Y* の２点が Y のブロックの相補的な対に１対１対応する．さらに，Y の４点と Y*の４点が１対１対応する．これらの対応を用いて，Y と Y*の和に，5-(24,8,1)デザインをあたえることができる．
　Y の２つのブロック対は，３点または２点の交換でうつりあう．前者は Y*の非可換な互換の対に，後者は可換なものに対応する．したがって，Y*の点は，Y 上の 11 個のブロック対で，たがいに３点の交換でうつりあうものに対応している．同様に，Y の点は，Y*上の 11 個のブロック対で，たがいに３点の交換でうつりあうものに対応している．

(2)頂点代数は，作用素係数の１変数ローランべき級数のなす代数である．土屋との共同で，C2 有限性をみたす頂点代数に対し，表現のフュージョン積，因子化の理論の研究をおこなった．
　頂点代数は量子場の数理モデルとしてもっとも単純なものである．場は，作用素を係数とする無限小円板上の有理関数であって，ある運動方程式をみたす．運動方程式を座標によらない形で書くためには，D 加群の言語を用いる．原点における極の位数は，作用を受けるベクトルに依存する．このため１点における場の積を定義することができない．そこで，異なる２点における場の積を考え，相互局所性とよばれる因果律の仮定をおく．これは，２点が離れているとき２つの作用素が可換であることを要求する．また頂点代数は自分自身に作用するが，このとき真空ベクトルという単位元に相当する元がある．まとめると，頂点代数は，運動方程式，相互局所性，真空ベクトルを基本構造とする．
　本研究において，まず相互局所性の帰結であるボーチャーズ関係式が，無限小円板の２個の直積を対角でブローアップしたとき，例外因子上の留数定理として得られることを注意した．
　共形場理論においては，リーマン面（代数曲線）上に，頂点代数をファイバーとするベクトル束を構成する．リーマン面上のいくつかの点に頂点代数の表現をおく．これらの表現上の多重線型形式で，頂点代数の作用が大域的に延長できるものを共形ブロックという．C2 有限性の仮定より，共形ブロックの空間が有限次元であることがみちびかれる．

頂点代数のカレント代数を，ヴィラソロ代数のハミルトニアンの左作用・右作用の生成する２変数多項式環上の加群とみるとき，すべての有限次元部分加群の和を正則両側加群とよぶ．

リーマン面上のいくつかの点に頂点代数の表現をおき，さらに別の１点に正則両側加群をおいた共形ブロックを考えると，表現のフュージョン積が得られる．これはまた，最後の１点にｎ位の零点をもつ共形ブロックを考えてｎについて極限をとったものと，完備化において一致する．

共形ブロックをリーマン面の族に対して考え，特に退化の状況に着目する．退化の状況を記述するのが因子化である．退化したリーマン面（安定曲線）において，特異点（二重点）におけるフュージョン積を考える．族の底空間において退化に対応する因子を正規化し，さらに全空間を正規化すると，二重点がはずれて２点に分かれる．そこに正則両側加群をおいて共形ブロックを考えたものが，安定曲線の族の上の共形ブロックの因子化である．因子化によって，共形ブロックに関する情報が，退化した曲線上の共形ブロックから読み取ることができるようになる．こうして，土屋・上野・山田の理論を，表現の圏が非半単純である頂点代数の場合に拡張することができる．

以上の基礎理論の整備の結果，頂点代数の表現の圏の，テンソル構造の詳細な研究がおこなえるようになった．

遮蔽作用素による頂点代数の構成を考えるとき，これを支配するのは，点の配置空間上の局所系（偏屈層）すなわち因子化可能層の理論である．これのテンソル圏としての構造を調べることは重要である．

さらにこれを通して，１のべき根におけるアファイン量子群の表現論との対応が得られるが，これについてもテンソル圏の構造が問題となる．これを，結び目，３・４次元多様体の不変量の理論を用いて調べることが今後の課題である．その出発点となるのが，今回の成果である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

①橋本義武:″ベクトル束とファイバー束″ 数理科学,査読無,574. 15-20 (2011)

②橋本義武:″ヤン・ミルズ方程式と対称性″ 数理科学,査読無,549. 45-50 (2009)

③ T.Houri,T.Oota,Y.Yasui: ″Closed conformal Killing -Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr -NUT-de Sitter spacetime″ Class. Quant. Grav. 査読有, 26. 45015 (2009)

④ T.Houri,T.Oota,Y.Yasui: ″Generalized Kerr-NUT-de Sitter metrics in all dimensions″ Phys. Lett. B 査読有, 666. 391-394 (2008)

⑤ Sakaguchi,M.; Yoshida,K.: ″Non-relativistic string and D-branes on AdS_5 ×S^5″ J.High Energy Phys. 査読有, 05. 1-23 (2007)

⑥Sakaguchi,M.;Yoshida K.: ″Intersecting noncommutative M5-branes from covariant open supermembrane″ Nucl.Phys.B 査読有,781. 85-98 (2007)

⑦ Oota, T.; Yasui Y.: ″New example of infinite family of quiver gauge theories″ Nucl.Phys.B 査読有,762. 377-391 (2007)

⑧ Hamamoto, N.; Houri T.; Oota, T.; Yasui Y.: ″Kerr-NUT-de Sitter curvature in all dimensioins″ J.Phys.A 査読有 40. F177-F184 (2007)

⑨Hashimoto,Y.: ″A short proof of Morley's theorem″ Elem.Math. 査読有,62. 121-121 (2007)

〔学会発表〕（計 13 件）

①橋本義武:頂点代数・共形場理論入門,第５回 GEOSOCK セミナー(20110304)大阪市立大学文化交流センター

②橋本義武:頂点代数入門,淡路島幾何学研究集会 2011(20110211)国民宿舎慶野松原荘

③橋本義武:On C2-cofinte conformal field theory,研究会「重力・幾何・素粒子」(20100929) 大阪市立大学

④橋本義武:共形場理論の幾何,第３回秋葉原微分幾何セミナー(20100710)首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス

⑤橋本義武: ″共形場理論の幾何学″ 多様体の種々の幾何構造とその応用. (20100311). 名城大学

⑥橋本義武: ″DG 代数のモデル圏 1,2″ Workshop on derived algebraic geometry I. (20091125). 国際基督教大学

⑦橋本義武: ″Triality and projective planes″ 微分・代数トポロジーの現在と未来. (20091110). かんぽの宿 徳島

⑧橋本義武: ″Spin(8)の triality をめぐって″ 幾何学阿蘇研究集会. (20090914). 休暇村南阿蘇

⑨橋本義武:″Combinatorial link Floer homology についてI, II, III″ 夏の学校「結び目とホモロジーおよびその周辺」. (20090825-20090827). 名古屋大学

⑩橋本義武:″On the signs of the combinatorial Heegaard-Floer complexes″ 第４回代数・解析・幾何セミナー. (20090217). 鹿児島大学

⑪橋本義武: ″曲面のスピン構造をめぐって″ 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会トポロ

ジー分科会特別講演. (20080926). 東京工業大学
⑫橋本義武: "Non-commutative geometry" ブラックホール, 佐々木・Einstein そして AdS/CFT 対応. (20080216). 湯原温泉米屋
⑬ 橋本義武 : "Tilting sheaves and D-affinity",研究集会「函館幾何セミナー」(20071115). KKR 函館

〔図書〕(計１件)
① 橋本義武ほか:現代幾何学の流れ, 日本評論社,209-218(2007)

６. 研究組織
(1)研究代表者
橋本義武 (HASHIMOTO YOSHITAKE)
東京都市大学・知識工学部・教授
研究者番号：20271182

(2)研究分担者
阪口真 (SAKAGUCHI MAKOTO)
岡山光量子研究所・研究員
研究者番号：90382027
(H19→H20 連携研究者)

大場清 (OHBA KIYOSHI)
お茶の水女子大学・大学院・人間文化創成科学研究科・准教授
研究者番号：80242337
(H19→H20 連携研究者)

安井幸則 (YASUI YUKINORI)
大阪市立大学・大学院・理学研究科・准教授
研究者番号：30191117
(H19→H21:連携研究者)

中井洋史 (NAKAI HIROFUMI)
東京都市大学・知識工学部・准教授
研究者番号：80343739
(H21-22)