

平成 22 年 6 月 7 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2009

課題番号：19540102

研究課題名 (和文) 結び目や仮想結び目の局所変形と不変量の研究

研究課題名 (英文) Study of local moves and invariants for knots and virtual knots

研究代表者

大山 淑之 (OHYAMA YOSHIYUKI)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：80223981

研究成果の概要 (和文): 位相幾何学では、紐で結び目を作り、その両端を同一視したものを結び目と呼び、グラフを具体的に空間内に実現したものを空間グラフと呼ぶ。結び目や空間グラフに対して、連続的に変形して同じ図形になるものには、同じ数学的量を対応させる。その数学的量を不変量という。すべての結び目不変量を階層分けした有限型不変量というものがある。本研究では、空間グラフの不変量を新たに定義し、その性質を研究した。結び目に対しては、局所変形から距離等の概念を結び目に導入し、有限型不変量の性質を明らかにした。

研究成果の概要 (英文): We tie a knot and identify the end points of it. That figure having no end points is called "a knot" in Topology. A graph in R^3 is called a spatial graph. Two knots or spatial graphs are thought to be same if we transform one into another continuously in R^3 and the same mathematical value is made to correspond to the same knots or spatial graphs. The value is called an invariant. The finite type invariant is an invariant that classifies all the knot invariants by order. In this study, we define a new invariant for spatial graphs and investigate the property of it. For knots, we introduce the notion of a metric or a complex and we investigate the property of finite type invariants in the knot space.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：位相幾何学、結び目理論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目、空間グラフ、Vassiliev 不変量、 C_n -move、 C_n -distance

1. 研究開始当初の背景

結び目理論の目的の一つは、結び目の分類で

ある。分類をおこなうには、同じ型の結び目に対し、同じ値を取る結び目不変量が必要となる。不変量として、結び目を大別するため

の不変量と正確な分類を目的とする多項式不変量があり、後者は量子不変量としてまとめられる。1990年に Vassiliev 不変量が定義された。結び目不変量全体を階層分けしたものと解釈でき、有限オーダーの Vassiliev 不変量は有限型不変量と呼ばれている。量子不変量に変数変換、テーラー展開を施して得られるべき級数の係数が有限型不変量になることが知られている。Vassiliev 不変量と幾何的な事柄との関係を表す Goussarov-Habiro の定理がある。2つの結び目のオーダー n 以下の Vassiliev 不変量が一致する必要十分条件は、その結び目が C_{n+1} -move という局所変形で移りあうという定理である。

Goussarov と Habiro が独立に示した Goussarov-Habiro の定理は、局所変形の重要性を語っている。 C_{n+1} -move で結び目を分類することが、オーダー n 以下の Vassiliev 不変量で結び目を分類することと同じである。この有限型不変量を組み合わせ的、具体的に研究してきた。ここで、具体的という意味は、Vassiliev 不変量の性質を調べるのに、出来る限り結び目を構成し、常に具体例を伴う研究を行ってきたということである。任意に与えたオーダーまで Vassiliev 不変量が一致する結び目が無限個存在するという定理は既に証明し、更に特別な不変量を一致させることが出来るか、 C_n -move がオーダー n の個々の Vassiliev 不変量をどの程度変化させるかという視点で研究を続けており、更なる研究の進展を目指していた。Vassiliev 不変量の研究は、個々の不変量の特色を浮き彫りにする。また、個々の不変量の分類能力が発揮されるのは、どのような結び目であるのか、様々な情報が得られる。局所変形を通して、結び目理論を研究することは不変量と結び目双方の研究に役立つのである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、まず 1 の当初の背景で述べた結び目の局所変形と Vassiliev 不変量に関する研究の更なる発展を目指すことである。どのような状況であれば、有限型不変量を一致させることができるのかを考察する。ある条件を満たす状況で有限型不変量を一致させることが出来れば、その条件を有限型不変量は反映していないことになる。

また、結び目だけでなく、仮想結び目や空間グラフに対しても、局所変形による研究を進める。仮想結び目とは、結び目の拡張である。結び目の射影図には、交点が見れるが、一般の交点だけでなく仮想的な交点も考えたのが、仮想結び目であり、曲面上の結び目と考えることもできる。結び目は円周の 3 次元空間への埋め込みであるが、円周をグラフと考えれば、一般のグラフの埋め込みが考え

られ、空間グラフと呼ばれる。空間グラフも結び目理論の拡張と見ることが出来る。研究代表者と連携研究者により、空間グラフの Vassiliev type の不変量が定義され、その応用についての結果がある。その研究結果を進展させ、空間グラフ理論に新たな不変量と問題を提起していくのが第 2 の目的である。

空間グラフにおいても仮想結び目においても、結び目の世界では起こり得ない現象が生じる。その研究結果を踏まえて、また結び目の世界に戻る。結び目の拡張であるが、結び目では起こり得ない現象は、逆に結び目の何らかの性質をも反映しているはずである。空間グラフや仮想結び目の研究が、結び目の研究に新たな視点を与えることになる。本研究の重要性は、個々の世界の研究だけではなく、結び目、空間グラフ、仮想結び目という 3 つの世界の関係による新たな問題提起にもある。

3. 研究の方法

有限型不変量が一致し、更に様々な条件を満たす結び目の構成については、結び目のイメージがしっかりしていなければ出来ない。研究分担者や連携研究者との議論を通して、ある特定の不変量に対して、どのような結び目ならばその不変量が一致するのか、結び目の特徴をつかみ不変量の性質を把握していく。この研究においては、常に不変量を計算するということが必要となる。Vassiliev 不変量の場合は色々な不変量が関係するので、計算は容易ではなく、コンピュータを利用する。

グラフが部分グラフとして、サイクルを含む時、そのグラフの空間への埋め込みは結び目を含むことになる。すなわち、空間グラフは部分集合として、結び目を含む。結び目不変量が空間グラフの不変量へ拡張されることになる。連携研究者との共同研究で、結び目の Vassiliev 不変量を空間グラフへ拡張し、空間グラフの特徴を見出した結果がある。この結果の進展を考える上でも、色々な不変量の計算が必要であり、コンピュータによる計算を行う。

また、研究を進める上で、結び目理論研究者との交流は欠かせない。結び目や仮想結び目の研究が関西で活発に行われている。連携研究者だけでなく、関西の結び目理論研究者との研究打ち合わせを頻繁に行う。

研究成果は研究集会、学会、また研究代表者が月に一度開催しているトポロジーセミナーで発表し、研究成果の発展の可能性を探る。

4. 研究成果

(1) 局所変形 pass move に関する結果：結

び目全体の集合に Gordian 複体というものを定義する。頂点を結び目とし、 $m+1$ 個の結び目の集合が互いに 1 回の pass move で移りあうとき m -単体であると定義する複体である。この Gordian 複体は、アルフ不変量が 0 と 1 の 2 つの成分からなっている。この複体に対し、どの頂点も任意に大きな次元の単体の面になっていること、Conway 多項式が等しい結び目の対で、おのおのから 1 回の pass move で得られる結び目の Conway 多項式の集合が異なるものが存在することを示した。ここで、Gordian 複体とは、局所変形から定義される複体で、すでに Vassiliev 不変量と密接な関係にある C_n -move と呼ばれる局所変形に対しても定義され、研究されており、今回は pass move に拡張したことになる。

(2) 交代結び目に関する結果：一つの交点を交差交換し、交代射影図が得られる射影図を概交代射影図という。概交代射影図を持ち、交代射影図を持たない結び目を概交代結び目と呼ぶ。交代結び目 K に対して、一つの交点を交差交換してその交代結び目が得られるような概交代結び目の数を $Alm(K)$ とおく。任意の自然数 n に対して、 $Alm(K) > n$ となるような交代結び目が存在することを示した。この $Alm(K)$ は交代結び目 K の不変量ということができる。

(3) 2 成分空間グラフの不変量の研究：ある 2 成分空間グラフに対しても、絡み目と同様に、絡み数を定義することができる。この絡み数の定義を少し変え、ある条件を満たす 2 成分空間グラフに対して、自然数の値を取る不変量を定義した。

この新不変量が、絡み数とは本質的に異なるものであること、また有限型不変量ではないことを示した。絡み数がオーダー 1 の Vassiliev 不変量であることを考えると、定義を少し変えるだけで、全く異なる不変量を得られることになる。この新不変量がどのような幾何学的意味を持つのか、今後の研究課題である。

(4) C_n -distance と Vassiliev 不変量に関する結果：2 つの結び目が C_n -move で移りあうとき、必要な C_n -move の最小回数は C_n -distance と呼ばれ、距離関数となる。 C_n -move で移りあう結び目の集合に対し、 C_n -distance により、距離空間の構造を入れ、結び目を中心とする球面を考える。2 つの結び目が距離 p 離れており、その 2 つの結び目を各々中心とする球面の接点の結び目を考える。一般には、接点は 1 点からなると思われるが、 C_1 -distance と C_2 -distance の場合、接点に無限個の結び目が存在することが知

られていた。 C_n -distance による距離において、 C_n -move で移りあう任意の 2 つの結び目に対し、その結び目を各々中心とする球面の接点に無限個の結び目が存在し、更にその無限個の結び目は任意に与えたオーダーまで Vassiliev 不変量が一致するという条件も満たせることを示した。 C_1 -distance と C_2 -distance の場合は、接点の無限個の結び目は更に多くの条件を満たすこともできる。現在は n が 3 以上の C_n -distance の場合において、接点の無限個の結び目にどのような条件を更に課すことが可能か、考察を続けている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Sumiko Horiuchi and Yoshiyuki Ohyama, A numerical invariant for two component spatial graphs, Journal of Knot Theory and Its Ramifications に掲載決定, 査読有.

Sumiko Horiuchi and Yoshiyuki Ohyama, Almost alternating knots producing an alternating knot, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, vol.19, No.4, 2010, p503-507 .

Yasutaka Nakanishi and Yoshiyuki Ohyama, The Gordian complex with pass moves is not homogeneous with respect to Conway polynomials, Hiroshima Mathematical Journal, 査読有, Vol.39, No.3, 2009, p443-450.

Yoshiyuki Ohyama and Harumi Yamada, A C_n -move for a knot and the coefficients of the Conway polynomial, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, Vol.17, No.7, 2008, p771-785.

[学会発表](計 13 件)

大山 淑之、On the C_n -distance and Vassiliev invariants、研究集会「結び目理論」2010 年 3 月 20 日、東京女子大学

堀内 澄子、On the C_n -distance and Vassiliev invariants、東京工業大学トポロジーセミナー、2010 年 1 月 21 日、東京工業大学

堀内 澄子、On the C_n -distance and Vassiliev invariants、日本数学会秋季総合分

科会、2009年9月24日、大阪大学

Sumiko Horiuchi, On the C_n -distance and Vassiliev invariants, The First KOOK-TAPU Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics, 2009年8月18日、大阪市立大学

大山淑之、On the C_n -distance and Vassiliev invariants, 神戸トポロジーセミナー、2009年7月25日、神戸大学

大山淑之、A numerical invariant for two component spatial graphs、拡大東京女子大学トポロジーセミナー(研究集会「結び目理論」)、2009年3月20日、東京女子大学

Sumiko Horiuchi, Almost alternating knots producing an alternating knot, Knots in Washington XXXVII 3rd Japan-USA Workshop in Knot Theory, 2009年1月10日、George Washington University

大山淑之、A numerical invariant for two component spatial graphs、研究集会 Intelligence of Low Dimensional Topology 兼拡大 KOOK セミナー、2008年10月7日、大阪市立大学

大山淑之、A numerical invariant for two component spatial graphs、日本数学会秋季総合分科会、2008年9月25日、東京工業大学

堀内澄子、Almost alternating knots producing an alternating knot、日本数学会秋季総合分科会、2008年9月25日、東京工業大学

中西康剛、Local moves and Gordian complexes, III、日本数学会秋季総合分科会、2008年9月25日、東京工業大学

大山淑之、A numerical invariant for two component spatial graphs、神戸トポロジーセミナー、2008年7月12日、神戸大学

堀内澄子、Almost alternating knots producing an alternating knot、神戸トポロジーセミナー、2008年7月12日、神戸大学

〔その他〕

ホームページ

<http://lab.twcu.ac.jp/ohyama/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大山 淑之 (OHYAMA YOSHIYUKI)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号：80223981

(2) 研究分担者

小林 一章 (KOBAYASHI KAZUAKI)
東京女子大学・文理学部・教授
研究者番号：50031323
(H19-20)

大阿久 俊則 (OAKU TOSHINORI)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号：60152039
(H19-20)

吉荒 聡 (YOSHIARA SATOSHI)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号：10230674
(H21：連携研究者)

小舘 崇子 (KODATE TAKAKO)
東京女子大学・現代教養学部・講師
研究者番号：90317826

中西 康剛 (NAKANISHI YASUTAKA)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号：70183514
(H20, 21：連携研究者)

谷山 公規 (TANIYAMA KOUKI)
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：10247207
(H20, 21：連携研究者)