

平成22年5月14日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540107

研究課題名（和文） リーマン多様体の放射曲率と位相

研究課題名（英文） Radial curvature and topology of Riemannian manifolds

研究代表者

塩濱 勝博（SHIOHAMA KATSUHIRO）

福岡大学・理学部・非常勤講師

研究者番号：20016059

研究成果の概要（和文）：リーマン多様体の放射曲率と位相の研究を進め、測地三角形の角度比較が基点を一つの頂点とする殆ど全ての三角形の全ての頂点に対して成り立つ事を証明した。放射曲率の概念を根本的に問い直し、放射曲率の概念は全臍的完備実超曲面の議論に対応すると考えた。この研究は階数1のコンパクト対称空間内の完備実超曲面内の2つの異なる主曲率を持つ完備実超曲面の研究に自然に発展した。かくして、実超曲面の主曲率と位相の関係が議論され、超曲面の大域的な特徴付けが得られた。

研究成果の概要（英文）：

The angle comparison theorem plays an important role for the study of the radial curvature and topology of pointed complete Riemannian manifolds. We have proved that the angle comparison for all the angles of all the generic geodesic triangles is valid. We are led to a new idea by thinking of radially curved manifolds as certain complete real hypersurfaces on the compact rank one symmetric spaces. This corresponds to the maximal diameter theorem for compact manifolds with positive curvature. Thus the global characterization of certain complete real hypersurfaces are obtained.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リーマン計量, 曲率, 測地線

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初, 放射曲率の条件下での測地三角形の角度比較は基点に於いては一般のモデル曲面に対しては不可能と信じられていた. モデル曲面が von Mangoldt 回転面と Hadamard 曲面の場合のみが例外的に可能であった. 基点に於ける角度比較が可能なモデル回転面は切断跡が極めて単純な構造を持つのが特徴である. Hadamard 回転面の切断跡は空集合である. Von Mangoldt 回転面の切断跡は対蹠点上の子午線の部分弧となる. 我々はモデル回転面の切断跡を詳しく調べた. 更なる難問は放射曲率の条件下で目的とするリーマン多様体族は曲率の値域に制限がなく, 従って特に微分構造の研究は極めて困難と考えられていた. この問題に立ち向かう事は曲率と位相の研究対象となるリーマン多様体族を大幅の拡大する点において極めて価値がある事と考えていた.

2. 研究の目的

完備点付きリーマン多様体の放射曲率と位相を研究する事が本研究の目的である. リーマン幾何学における従来の曲率と位相の研究は曲率の下限を設定したものであり, 本研究は点付き完備リーマン多様体の放射曲率の下限を一般の回転面モデルの放射曲率によって下から支える為に, 曲率の値域に関する制限が撤廃されたリーマン多様体のクラスでの位相構造の研究となる. 放射曲率の条件下で証明されたコンパクト点付きリーマン多様体の球面微分同相定理はリーマン多様体の曲率の値域に制限がない. この点は本研究の大きな特徴の一つである. 完備非コンパクト点付きリーマン多様体の位相に関しては比較空間としてのモデル回転面の全曲率の条件下に多様体の剛性定理及び有限性定理や, 端点の個数評価が得られた. この結果も未発表である.

3. 研究の方法

完備点付きリーマン多様体 M の基点 o を頂点のひとつとする任意の測地三角形 $\Delta(opq)$ に対して, 参照空間としてのモデル回転面上に三辺の長さが等しく, 基点を頂点の一つとする測地三角形が描けるかが重要な問題となる. 基点の対辺 pq 上に任意の点 x を取って測地三角形 $\Delta(opx)$ の比較三角形をモデル回転面に op の対辺を固定して描くとき, 一つの曲線が得られる. この曲線と p の対応点の切断跡の関係を調べる事が極めて重要な研究課題となる.

(1) 一般に, アレクサンドロフ曲面上の切断跡は樹の構造を持つ事が Shiohama-Tanaka によって研究されている. 曲面上の切断跡の研究を深めていく過程において, 平面内の有限ネットワークの長さに関する Steiner ratio 予想 (Gilbert-Pollak によって提唱された) の Du-Hwan による証明には欠陥がある事が印南信宏-猿子幸宏-申請者によって解明され, 反例を提示して Du-Hwan の証明が不完全である事を発表した.

(2) 放射曲率の概念を曲面論の観点から見れば全局的超曲面に対応している. 放射曲率の最も単純な例はユークリッド空間である. ユークリッド空間の切断跡は空集合だから Busemann 関数は滑らかで, これをコンパクト部分多様体に制限すればモース関数が得られる. その臨界点に於ける指数は負の主曲率の個数に等しい. Lipschitz-Killing 曲率の単位法束上の積分計算にこの性質を適用した結果, 許洪偉 (浙江大・教授) と共同研究で一般化された Gauss-Bonnet の定理や部分多様体の全曲率に関する Chern-Lashof の定理等に統一的な証明を与えた.

(3) 球面やユークリッド空間内の全局的超曲面 (即ち球面) の主曲率は一つであるが, 2つの主曲率を持つ超曲面はコンパクト階数 1 の対称空間内に距離球面として存在する. 正則断面曲率が一定の射影空間は各々の接ベクトルに対して曲率変換の固有空間による直交分解を許容する. この点に着目して射影空間内の完備実超曲面の型作用素と曲率変換との間に一定の条件を設定すれば放射曲率と位相の研究を射影空間内の実超曲面論に展開出来る事を確信した. この様にして放射曲率と位相の研究は, その対象となるリーマ

ン多様体族の世界を更に拡大した.

4. 研究成果

(1)放射曲率と位相に関する研究成果について基本的な結果を得た事は大きな収穫であった. 一般の回転面モデルを参照空間とする点付き完備リーマン多様体に対する Toponogov の比較定理を基点を頂点の一つとする殆ど全ての測地三角形に対して証明した. この結果を非負の全曲率を許容する回転面モデルを参照空間とする多様体に適用して多様体の有限性定理や端点の一意性定理を証明した. 従来得られていた結果はモデル曲面が von Mangoldt 回転面及び Hadamard 回転面であったので, それを拡張した.

(2) 次に, 中華人民共和国の昆明に於いて開催された第2回日中微分幾何学研究集会で, 球面モデルを参照空間とするコンパクト点つきリーマン多様体が標準的球面と微分同相となる条件を体積の条件下で求めた. この成果は条件を満たすリーマン多様体族の曲率に関する制限がない点が極めて独創的であるとの評価を得た. (1), (2)の公表に時間がかかり, 未公開である.

(3) 2009年3月に佐賀大学で開催された International Conference on Differential Geometry において許洪偉・浙江大学教授との共同研究で放射曲率を改善する情報交換が開始された. 放射曲率の最も単純な放射曲率の例としてユークリッド空間がある. ユークリッド空間内の部分多様体の単位法束上で定義された Lipschitz-Killing 曲率の計算を臨界点の指数との関連に於いて実行し, リッチ曲率ノルムに関する球面微分同相定理, および Gauss-Bonnet-Chern の定理, 部分多様体の全曲率に関する Chern-Lashof の定理等に対して統一的かつ簡潔な証明を与えた. この結果は J. Geometric Analysis から発表される予定である.

(4) 複素射影空間内の主曲率一定実超曲面の研究は高木亮一・千葉大学教授, Cecil-Ryan 等多くの研究者によって研究されていたが, 結果は全て小域的な結果であった. 四元数射影空間についても同様である. しかし八元数射影平面内の実超曲面の研究は小域的な結果も含めて皆無であった. 濱田龍義(福岡大助教)との共同研究でコンパクト階数1の対称空間内の完備実超曲面の型作用素と曲率変換の固有空間が一致する時, 超曲面は距離球面である事を証明した. この成果の証明は係数体の制限を設けない点で画期的である.

超曲面全体を把握する大域的な結果は法ベクトルに接する測地線に沿う N-ヤコビ場の性質を大域的に扱って初めて得られた. この点は注目に値するだろう.

(5) 曲面の切断跡の研究を深めていくなかで, 平面上の有限個の点を結ぶネットワーク(有限樹)の全長を最短とする様々な方法に関するよく知られた古典的な問題提起がある. 印南信宏(新潟大教授), 猿子幸宏(佐賀学講師)との共同研究で平面上の有限ネットワーク(有限樹)の長さに関して Gilbert と Pollak が提唱した Steiner 比に関する予想を Du-Hwan が肯定的に解決した(Algorithmica, vol 7(1992年)とされていた. しかし彼等の証明には, Steiner 位相を用いた有限樹の変形に際して長さに関する連続性が成り立たない事を反例を挙げて示し, Gilbert-Pollak の予想が未解決である事を明らかにした. Algorithmica の査読者と長時間に亘る議論の末, Du と Hwan は証明の不完全を認め, 我々の結果の掲載が決定された.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 塩濱勝博 and Xu Hongwei, An Integral formula for Lipschitz-Killing curvature and the critical points of height functions, to appear in J. Geometric Analysis, 査読有.
- ② 濱田龍義, 塩濱勝博 Complete real hypersurfaces in compact rank one symmetric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 3905--3910, 査読有.
- ③ K. Kim, 印南信宏, 猿子幸弘, 塩濱勝博, The Steiner ratio conjecture of Gilbert-Pollak may still be open, Algorithmica, vol. 57, Issue 4(2010), page 869. 査読有.

[学会発表] (計5件)

- ① 塩濱勝博, 非コンパクト多様体の放射曲率と位相, Differential Geometry Seminar, A Conference in celebration of the sixtieth birthday of Minoru Tanaka, 東海大学湘南校舎, 2009年9月21-22日
- ② 塩濱勝博, Radial curvature and topology of complete noncompact manifolds,

Global Analysis and Differential Geometry,
Saga University, 2009年3月21日

- ③ 塩濱勝博, Complete real hypersurfaces in hyperbolic spaces with constant holomorphic sectional curvature, 2009年3月3日, (横浜市立大学数学セミナー)
- ④ 塩濱勝博, 双曲空間内の完備実超曲面, 2009年2月21日, リーマン幾何と幾何解析, (筑波大学研究集会)
- ⑤ 塩濱勝博, 標準的射影空間内の完備実超曲面, 2008年11月21日, Geometry and something, (福岡大学微分幾何研究会)

[図書] (計1件)

Introduction to Riemannian Geometry,
日本女子大学理学部講義録, 2007年9月, 143
ページ(数物科学科・久保淑子教授と共著)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塩濱 勝博 (SHIOHAMA KATSUHIRO)
福岡大学・理学部・非常勤講師
研究者番号: 20016059

(2) 研究分担者

陶山 芳彦 (SUYAMA YOSHIHIKO)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号: 70028223
石川 晋 (ISHIKAWA SUSUMU)
福岡工業大学・情報工学部・教授
研究者番号: 10039258
(H19のみ研究分担者)

川久保 哲 (KAWAKUBO SATOSHI)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号: 80360303
松浦 望 (MATSUURA NOZOMU)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号: 00389339
(H20~)