

平成 22 年 6 月 18 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007 ～ 2009
 課題番号：19540108
 研究課題名 (和文) Coarse 幾何学と距離に依存するコンパクト化-Novikov 予想の周辺
 研究課題名 (英文) Coarse geometry and compactifications that are metric-dependent, with relation to Novikov conjecture
 研究代表者
 知念 直紹 (CHINEN NAOTSUGU)
 広島工業大学・工学部・准教授
 研究者番号：20370067

研究成果の概要 (和文)：有界でない距離空間の大域的な位相的・幾何的性質で重要な asymptotic 次元、それと関係があると思われる写像のカラーリング、さらに、距離に依存するコンパクト化として Higson・Smirnov コンパクト化の剰余の位相的性質について研究を行った。主結果として、2次元ユークリッド空間に同相な CAT(0)空間の asymptotic 次元は2であることが得られた。これは「すべての CAT(0)群の asymptotic 次元は有限か?」の問題の解決の最初の一步となる。

研究成果の概要 (英文)：We investigate coarse geometric properties of unbounded metric spaces that contains asymptotic dimension, colorings for maps, and topological properties of remainders of Higson and Smirnov compactifications. We prove that all proper CAT(0) spaces that are homeomorphic to the plane have asymptotic 2-dimension. This result is the first one step of the solution of a question “Does every CAT(0) group have finite asymptotic dimension?”.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総 計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何、距離に依存するコンパクト化、asymptotic 次元、写像によるカラーリング、幾何学的群論、Higson コンパクト化、Smirnov コンパクト化

1. 研究開始当初の背景

離散群の研究、基本群に関連する多様体の不変量の研究においての基本的な道具である Gromov が主に提案した大域的なトポロジ

ー、すなわち Coarse 幾何学の研究と、色々な問題の解決のための道具として使用される距離に依存するコンパクト化の研究は、幾何学的トポロジーあるいは幾何学的群論に

においても現在も重要な位置を占めている。Coarse 幾何学のなかで特に重要な不変量として定義された asymptotic 次元は、多くの数学者が研究している Novikov 予想と Gromov-Lawson 予想との深い関連がある。つまり、asymptotic 次元が有限ならば上述の 2 つの予想が肯定的だと示されているので、asymptotic 次元を決定することが重要である。特に、asymptotic 次元が有限である幾何的な十分条件を探すことが最重要である。また、asymptotic 次元は Higson コンパクト化の剰余の被覆次元と密な関連があることと、Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化は類似していることから、Higson コンパクト化と Smirnov コンパクト化を調べることも重要だと思われる。

2. 研究の目的

研究開始当初の背景で述べたことから、asymptotic 次元の決定と asymptotic 次元が有限であるための十分条件を見つけることが重要である。そこで注目したのが、研究分担者である友安氏との共著の論文において研究した coarsely uniformly connected という性質である。coarsely uniformly connected は Coarse 同値な性質であり、現在、低次元における coarsely uniformly connected ユークリッド空間の asymptotic 次元を決定した結果は見つかっていない。さらに、Higson コンパクト化の剰余の被覆次元が無限もしくはそのユークリッド空間の次元を超えるものは見つかっていない。このことから、coarsely uniformly connected なユークリッド空間の asymptotic 次元と Higson コンパクト化の剰余の次元を調べることが本研究の独創的な部分になる。低次元空間において以下のことを目的とする。

(1) coarsely uniformly connected n 次元ユークリッド空間の asymptotic 次元は n 次元以下になることを明らかにする。

① coarsely uniformly connected n 次元ユークリッド空間の Higson コンパクト化の剰余の次元は n 次元以下になることを明らかにする。

② uniformly locally connected n 次元ユークリッド空間の Smirnov コンパクト化の剰余の次元は n 次元以下になることを明らかにする。

(2) 無限 asymptotic 次元 をもち Higson コンパクト化の剰余の次元が有限である距離空間を構成する。

(3) coarsely uniformly connected n 次元

ユークリッド空間の Higson コンパクト化の剰余と Stone-Cech コンパクト化の剰余は同相にならないことを明らかにする。

① Stone-Cech コンパクト化、Higson コンパクト化あるいは Smirnov コンパクト化の剰余のそれぞれ異なるトポロジー的性質 (特徴) を明らかにする。

② Higson コンパクト化あるいは Smirnov コンパクト化の剰余のシェイプによる分類をし、同相でないことを明らかにする。

3. 研究の方法

2 人の研究分担者あるいは宇都宮大学の保坂氏と直接会って本研究について共同研究を行うことを主とするが、メール・電話等を使用しても情報等を共有し研究を押し進めた。特に、メールにおいて、共同研究を行う場合は絵を描いて説明することが多々あり、そのためスキャナーを利用し絵をメールで送ってやりとりをした。また、得られた研究成果を毎年 RIMS 研究集会において発表した。

(1) 研究分担者の友安氏は Stone-Cech コンパクト化、Higson コンパクト化あるいは Smirnov コンパクト化に関して一般的なトポロジーの性質の研究の国内における先進的な研究者であるので、コンパクト化に関してメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接あつて共同研究を行った。

(2) 研究分担者の小山氏は次元論あるいはシェイプ理論の研究において国内で先進的な研究者である。よって、小山氏と次元論に関してメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接あつて共同研究を行った。また海外からの Coarse 幾何学の情報を積極的に収集し、本研究に活用してきた。

(3) 宇都宮大学の保坂氏は幾何学的群論による無限 Coxeter 群の研究において国内で先進的な研究者であるので、幾何学的群論の立場から研究を行うことにおいてメール等で綿密に連絡を取り合い、あるいは直接あつて共同研究を行った。また幾何学的群論の情報を積極的に収集し、本研究に活用してきた。

4. 研究成果

(1) 研究目的(1)について、1 次元、つまり coarsely uniformly connected 半直線 X について研究し、 X の asymptotic 次元は 1 であることを示した (発表論文⑧)。さらに、 X の Higson コンパクト化の剰余は indecomposable 連続体であることを示した。次に 2 次元以上の coarsely uniformly

connected ユークリッド空間に同相な空間 Y について研究した。まず Y の Higson コンパクト化の剰余は unicoherent 連続体であること示した。次に具体的に Y の次元以下の asymptotic 次元をもつように coarsely uniformly connected な距離を構成した。しかし、 Y の次元より大きい有限 asymptotic 次元をもつように Y の coarsely uniformly connected な距離を構成できるかは知られていない。

通常の距離を持つ上半平面と平面の Higson あるいは Smirnov コンパクト化の剰余は同相でないことを示した。しかし、Higson コンパクト化の剰余と Stone-Čech コンパクト化の剰余が同相かどうかは未だに知られていない。

(2) coarsely uniformly connected な 2 次元ユークリッド空間に同相な距離空間について研究し、特に 2 次元ユークリッド空間に同相な CAT(0) 空間について調べた。CAT(0) 空間は coarsely uniformly connected であり、幾何学的群論と深い関係がある。幾何学的群論の主要な問題が

WEB : <http://aimath.org/pggt> に載っているが、その内の中心的な問題として「すべての CAT(0) 群の asymptotic 次元は有限か?」がある。CAT(0) 多様体は可縮なので、このような空間の代表的な例はユークリッド空間に同相な空間が考えられる。このことをふまえると、問題「 n 次元ユークリッド空間に同相な CAT(0) 空間の asymptotic 次元は有限か?」が考えられる。上述の 2 つの問題より、最初に 2 次元ユークリッド空間に同相な CAT(0) 空間を調べることは重要である。発表論文①において、平面に同相な CAT(0) 空間の asymptotic 次元は 2 であることを示した。つまり、2 次元においてはその空間の次元を越えないことがわかった。さらに、この理想境界はサークルであることを示した。これは上述の問題の解決の最初の 1 歩となる。

(3) 写像のカラーリングはコンパクト化の剰余の固定点と深い関係がある。連結な空間はある連結なグラフと同じ asymptotic 次元を持つことが知られている。特に有限生成群の Cayley グラフの asymptotic 次元を調べることは幾何学的群論においても重要な位置をしめている。つまり、グラフ上の同相写像のカラーリング数を調べることは重要だと考える。発表論文⑤において、有限グラフ上の不動点を持たない同相写像について調べ、

その同相写像の周期達の最大公約数が 1 あるいは 3 でなければ、その同相写像のカラーリング数は 3 であることを示した。発表論文③において、周期点があるグラフ上の不動点を持たない同相写像について調べ、その同相写像の周期達の最大公約数が 1 あるいは 3 であるとき、その同相写像のカラーリング数は 4 であることを示した。つまり、有限グラフ上の不動点を持たない同相写像において、カラーリング数は 4 であることとその同相写像の周期達の最大公約数が 1 あるいは 3 であることは同値であることが分かる。

(4) Higson コンパクト化に類似したコンパクト化として Smirnov コンパクト化がある。Smirnov コンパクト化を調べることによって Higson コンパクト化の解明に繋がり、さらには asymptotic 次元に繋がっていく。一様局所連結な半直線 X について研究し、 X の Smirnov コンパクト化の剰余の被覆次元は 1 であることを示した。さらに、 X の Smirnov コンパクト化の剰余は indecomposable 連続体であることを示した。次に 2 次元以上の一様連結なユークリッド空間に同相な空間 Y について研究し、具体的に Y の次元以下の Smirnov コンパクト化の剰余の被覆次元をもつように一様連結な距離を構成した。しかし、 Y の次元より大きい Smirnov コンパクト化の剰余被覆次元をもつように Y の一様連結な距離を構成できるかは知られていない。上述の結果はすべて研究成果 (1) の結果を導きだすきっかけとなった。上述の結果は現在投稿中である。

(5) 幾何学的群論において、Gromov が提案した理想境界は豊富な情報を含んでおり、多くの研究者が理想境界の位相的性質を解明してきた。すべての連続体はある CAT(0) 空間の理想境界として実現できることが知られているが、通常 CAT(0) 空間の理想境界は複雑な連続体が構成される。このことから複雑な連続体を調べるのが asymptotic 次元の解明にも繋がっていくと考えられる。複雑な連続体として対称積がよく知られているが、発表論文②において、サークルの対称積について調べ、奇数次元のサークルの対称積は同じ次元の球面と同じホモトピー型をもつことを示し、さらに偶数次元のサークルの対称積はその次元より一つ下の次元の球面と同じホモトピー型をもつことを示した。さらに、上述の 3 次元でない対称積は多様体にならないことを示した。つまり、発表論文②においてサークルの対称積はほとんど解明できた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計9件)

- ① Naotsugu Chinen、Tetsuya Hosaka、Asymptotic dimension of proper CAT(0) spaces that are homeomorphic to the plane、Canadian Mathematical Bulletin、査読有、掲載予定
- ② Naotsugu Chinen、Akira Koyama、On the symmetric hyperspace of the circle、Topology and its Applications、査読有、掲載予定
- ③ Naotsugu Chinen、The colorings for maps on connected finite graphs、数理解析研究所講究録、査読無、1681、2010、pp.56-64
- ④ Akira Koyama、Coarse 幾何学と Shape 理論、数理解析研究所講究録、査読無、1681、2010、pp.42-48
- ⑤ Yuji Akaike、Naotsugu Chinen、Kazuo Tomoyasu、Colorings of periodic homeomorphisms、Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics、57、2009、no. 1、pp.63-74.
- ⑥ Yuji Akaike、Naotsugu Chinen、Kazuo Tomoyasu、Colorings of fixed-point free homeomorphisms on finite connected graphs、数理解析研究所講究録、査読無、1634、2009、pp.13-19
- ⑦ Naotsugu Chinen、Tetsuya Hosaka、CAT(0)空間と asymptotic 次元、数理解析研究所講究録、査読無、1634、2009、pp.49-54.
- ⑧ Yuji Akaike、Naotsugu Chinen、Kazuo Tomoyasu、距離に依存するコンパクト化-その周辺、数理解析研究所講究録、査読無、1578、2008、pp.78-87.
- ⑨ E.Cuchillo-Ibáñez、Jerzy Dydak、Akira Koyama、M. A. Morón、 C_0 -coarse geometry of complements of Z-sets in the Hilbert cube、Transactions of the American Mathematical Society、査読有、360、2008、no. 10、pp.5229-5246

〔学会発表〕(計6件)

- ① Naotsugu Chinen、球面の対称積について、General Topology シンポジウム、大分大学、2009年12月17日
- ② Naotsugu Chinen、Asymptotic dimension of proper CAT(0) spaces which are homeomorphic to Euclidean spaces、広島大学トポロジー・幾何セミナー、2009年12月15日
- ③ Yuji Akaike (代表)、有限連結グラフ上の不動点を持たない同相写像の coloring、日

本数学会秋季総合分科会、大阪大学、2009年9月26日

④ Naotsugu Chinen、距離に依存するコンパクト化の剰余の局所連結性について、第44回位相空間論シンポジウム、島根大学、2009年5月30日

⑤ Naotsugu Chinen、The symmetric hyperspaces of the circle、第118回日本数学会九州支部例会、琉球大学、2008年2月2日

⑥ Kazuo Tomoyasu (代表)、Smirnov コンパクト化の剰余の次元と一様局所連結性、第118回日本数学会九州支部例会、琉球大学、2008年2月2日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

○取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/naochin/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

知念 直紹 (CHINEN NAOTSUGU)
広島工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20370067

(2) 研究分担者

小山 晃 (KOYAMA AKIRA)
静岡大学・創造科学技術大学院・教授
研究者番号：40116158
(H19→H20：連携研究者)
友安 一夫 (TOMOYASU KAZUO)
都城工業高等専門学校・一般科目理科・准教授
研究者番号：10332107
(H19→H20：連携研究者)

(3) 連携研究者

なし