様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２６日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０１１２
研究課題名（和文）　小さな無限に内在する巨大な無限の研究

研究課題名（英文）　Study of the large infinite intrinsic to the small infinite

研究代表者
塩谷　真弘（SHIOYA　MASAHIRO）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：３０２５１０２８

研究成果の概要（和文）：集合論においては、小さな無限集合が持ちうる組合せ論的性質が非常に興味をもたれている。特に最小の非可算基数が飽和イデアルを持つようなモデルの存在を示した Kunen の結果は非常に重要である。Kunen のモデルの構成法は、本質的に帰納的なものであった。本研究では、Kunen と同様のモデルを明示的に構成することに成功した。さらに、その手法を発展させることにより、いわゆる３組に対する Chang 予想が成立する新しいモデルも構成することができた。

研究成果の概要（英文）：In set theory, combinatorial properties that small infinite sets can have are quite interesting. In particular, Kunen's result is very important that showed the existence of a model in which the smallest infinite cardinal carries a saturated ideal. The construction of Kunen's model was essentially inductive. We have succeeded in constructing a similar model explicitly. Moreover, elaborating the method, we can construct a new model in which Chang's conjecture for triples holds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数理論理学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：数学基礎論

１．研究開始当初の背景

(1) Kunen は次の古典的定理を証明した：

定理（Kunen). Huge 基数の存在を仮定する。このとき最小の非可算基数上に飽和イデアルが存在する強制モデルが存在する。
Kunen の手法は既によく理解され，それを洗練させることにより，結論における飽和性を改善する様々な結果が得られている。この方面で，現在最も強力な結果として次の定理がある：

定理（Woodin). Huge 基数の存在を仮定する。このとき最小の非可算基数上に稠密イデアルが存在する強制モデルが存在する。

Woodin の証明は、Kunen のものとは全く異なるものであった。実際，最終的なモデルに至る過程で選択公理が成立しないモデルを経由したことが，Woodin のアイデアの核心部分である。

(2) Kunen が構成した飽和イデアルのモデルでは、ペアに対する Chang 予想も成立することが、Kunen 自身によって注意されている。Kunen の手法を発展させることにより Foreman は、ペアを３組にしても Chang 予想が成立するモデルを構成した：

定理（Foreman). 2-Huge 基数の存在を仮定する。このとき３組に対する Chang 予想をみたす強制モデルが存在する。

Foreman の構成法は論文で８頁を要する、非常に複雑なものであった。しかも、３組を４組にする方法も知られていない。つまり、次の予想は未解決であった：

予想(Foreman). 3-Huge 基数の存在を仮定する。このとき４組に対する Chang 予想をみたす強制モデルが存在する。

２．研究の目的

(1) 次の Woodin の問題を解決することが最終目標である：

問題（Woodin）. Huge 基数の存在を仮定する。可測基数の後続基数上に稠密イデアルが存在するモデルを構成せよ.

Woodin 自身の手法では、この問題は解決できないと思われる。したがって、この問題の解決には、Woodin の定理に対する新しいアプローチも要請されている、と思われる。

稠密性は，小さな無限集合上のイデアルが持ちうる最強の性質であると考えられている．イデアルの最強の性質であることから，モデルの解析ができれば無限組合せ論に多くの新しい知見をもたらすことが期待できる．したがって解析しやすい、簡明なモデルの構成が望まれている。

(2)前述の Foreman の予想を証明することが最終目標である：

予想. 3-Huge 基数の存在を仮定する。このとき４組に対する Chang 予想をみたす強制モデルが存在する。

解決のためには、当然 Foreman とは異なる手法を開発することになる。

３．研究の方法

(1) 中間目標として、まず Kunen と同様のモデルを明示的に構成することを目指した。Kunen のモデルの構成法は、本質的に帰納的なものであった。明示的な構成のためには、巨大な無限基数を小さな無限基数に崩壊させる種々の強制法について、より詳しい情報が必要となる。これらの情報から、最終的に望ましいモデルを見つける。

(2)中間目標として、まず Foreman と同様のモデルをもっと簡明に構成することを目指した。さらにさかのぼって、Kunen のモデルと同様にペアに対する Chang 予想が成立するモデルを明示的に構成することも目指した。

４．研究成果

(1) まず次の定理を証明した：

定理. λ をターゲットとする Huge 基数 κ の存在を仮定する。与えられた正則非可算基数 μ に対して、μ と κ の Easton 崩壊と κ と λ の Easton 崩壊により得られたモデルでは、

κはμの後続基数となり、κは飽和イデアルを持つ。

Easton 崩壊は、本研究によって導入された、巨大な無限基数を小さな無限基数に崩壊させ、しかも明示的に定義された強制法である。この定理により、少なくとも中間目標は達成できたことになる。

また上述のモデルでは、Kunen の手法を用いて構成された(Woodin の定理以外の)モデルにおける強い飽和性がすべて成立すると思われる。本研究ではまず、Laver のモデルで成立する強い飽和性を確認した。

さらにこの定理により、以下の Foreman の諸定理に対して、明示的なモデルを与えることができた：

定理（Foreman). Huge 基数の存在を仮定する。このとき最初のω個の非可算基数上に飽和イデアルが同時に存在する強制モデルが存在する。

定理（Foreman). Huge 基数の存在を仮定する。このとき最初の$\omega+1$ 個の非可算基数上に飽和イデアルが同時に存在する強制モデルが存在する。

さらには、次の結果に対しても明示的なモデルの構成法を与えることができると期待される：

定理（Foreman). Huge 基数の存在を仮定する。このときすべての非可算基数上に飽和イデアルが同時に存在する強制モデルが存在する。

(2) (1)と同様の手法により次の定理を証明した：

定理. λをターゲットとする Huge 基数κの存在を仮定する。与えられた正則非可算基数μに対して、μとκの間にある基数とκの Silver 崩壊達の積とκとλの Silver 崩壊により得られたモデルでは、κはμの後続基数となり､ペアに対する Chang 予想が成立する。

この結果により、ペアに対する Chang 予想が成立するモデルを明示的に構成できたことになる。

この手法を発展させることにより Foreman の定理に簡明な証明を与えた：

Foreman の定理. 2-Huge 基数κの存在を仮定する。このとき３組に対する Chang 予想をみたす強制モデルが存在する。

この強制法は明示的とは言いがたいが、１頁ほどで定義できる、比較的簡明なものである。以上をもって、(2)における中間目標は達成できたことになる。

４組に対する Chang 予想をみたすモデルについては、今後の研究に俟たなければならない。しかし少なくとも、我々のモデルを研究することにより、その構成の障害となる部分が明確に把握できるようになることは間違いないと思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

1. 塩谷真弘, A proof of Shelah's strong covering theorem for P$\kappa\lambda$, Asian Journal of Mathematics 12 (2008) 83-97, 査読有.

2. 塩谷真弘, Diamonds on P$\kappa\lambda$,Computational Prospects of Infinity, Part II, Presented talks, Lecture Notes Series, Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore 15 (2008) 271-298, 査読有.

3. 塩谷真弘, A new saturated filter, 公理的集合論と集合論的位相空間論, RIMS 研究集会報告集 1595 (2008) 63-69,査読無.

4. 塩谷真弘, Stationary reflection and the club filter, Journal of Mathematical Society of Japan 59 (2007) 1045-1065,査読有.

〔学会発表〕（計３件）

1. 塩谷真弘, A model of a saturated ideal, Asian Logic Conference, 神戸大学工学部, 2008 年 9 月 2 日.

2. 塩谷真弘, 定常集合の組合せ論, 日本数学会年会数学基礎論・歴史分科会　特別講演, 近畿大学理工学部, 2008 年 3 月 25 日.

3. 塩谷真弘, A new model with a saturated filter, 公理的集合論と集合論的位相空間論, 京都大学数理解析研究所, 2007 年 11 月 28 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

塩谷　真弘 (SHIOYA MASAHIRO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：３０２５１０２８

(2)研究分担者

阿部　吉弘 (ABE YOSHIHIRO)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号：１０１５９４５２
（Ｈ２０→Ｈ２１：連携研究者）

坪井　明人 (TSUBOI AKITO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：３０１８００４５
（Ｈ２０→Ｈ２１：連携研究者）

松原　洋 (MATSUBARA YO)
名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：３０２４２７８８
（Ｈ２０→Ｈ２１：連携研究者）