

平成22年 5月20日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540113

研究課題名（和文） 弾性方程式および導電方程式に対する逆問題の解の構成

研究課題名（英文） Inverse Problems for elasticity system and conductivity equation

研究代表者

田沼 一実 (TANUMA KAZUMI)

群馬大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：60217156

研究成果の概要（和文）：多くのパラメータをもつ複雑な方程式系である非等方弾性体方程式に対して、系統的な数学解析を可能とする Stroh formalism とその応用を、著者独自のアプローチで解説した。自由境界表面に振幅が集中する弾性表面波（Rayleigh 波）の挙動を解析し、弾性体の未知の非等方性を決定する逆問題に一つの指針を与えた。人体表面での電流測定により人体内部の導電率分布を同定するインピーダンス トモグラフィーは導電方程式の逆問題として定式化されるが、境界での導電率を決定する包括的な再構成公式を導出した。

研究成果の概要（英文）：The Stroh formalism is a powerful and elegant mathematical method developed for the systematic analysis of the equations of anisotropic elasticity. The representative wrote an exposition which introduces this formalism and its applications to both static and dynamic elasticity. On the basis of this formalism he investigated the behavior of elastic surface waves called Rayleigh waves propagating near the traction-free surface. This work provides an approach to the inverse problem of determining anisotropy of the materials by making measurements of Rayleigh waves. Electrical impedance tomography, where one detects the conductivity distribution inside an unknown body from electrical measurements at the boundary, is described as inverse boundary value problems for the conductivity equation. The representative gave reconstruction formulas for the conductivity at the boundary in a general setting, using the metric tensor pertaining to the boundary surface.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：応用解析学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：非等方弾性体，弾性表面波，Rayleigh 波，Stroh formalism，逆問題，導電体，インピーダンス トモグラフィー，残留応力

1. 研究開始当初の背景

(1)弾性体方程式に対する逆問題について

①弾性的性質が空間内のあらゆる回転に依存しない物体が等方弾性体であり、等方弾性体以外の弾性体为非等方弾性体である。材料力学、地球物理等の分野では、扱う物質の多くが非等方弾性体である。そこでは、未知の弾性体の非等方性をいかにして決定するかが大きなテーマとなる。その手段の一つは、弾性体を伝播する弾性波の観測である。たとえば、未知の弾性体を伝わる弾性波の速度を観測することで、弾性体の非等方性を決定する試みは30年以上の歴史を有する。

一方、数学解析において、等方弾性体方程式に入るパラメータは、ラーメ係数とよばれる2個の独立成分からなる弾性テンソルであり、方程式はシステムとはなるが、比較的扱いやすい。ところが、非等方弾性体方程式は、最大21個の独立成分をもつ弾性テンソルをパラメータにもち、複雑な方程式系となる。このような状況の下、多くのパラメータを含む複雑な非等方弾性体方程式をもつ普遍的な構造に着目したStroh formalismが考案され、非等方弾性体方程式を系統的に扱うことで、波動伝播の解析、逆問題への応用等の研究が、ここ数十年、国内外で活発に行われてきた。このアプローチにおける代表的な研究者としてBarnett, Chadwick, Lothe, Nakamura, Ting氏等があげられる。1996年Ting氏により、Stroh formalismをもちいた解析の最初の成書として、Anisotropic Elasticity (Oxford University Press)が出版された。この書籍はやや工学的内容に重点が置かれている。

②これまで研究代表者は、Stroh formalismを基礎にして、1990年代の後半より非等方弾性体方程式に対して、基本解の導出、変位と表面力との線形関係をあらわす代数数量サーフェスインピーダンスの公式の導出、境界値逆問題の考察を行ってきた。2003年より、応募者は、①の最初に述べた弾性波の観測による弾性体の非等方性の決定問題に着目し、その数学的定式化のため、非等方弾性体を伝播する弾性波の性質、挙動を解析する順問題にまず取り組むべきと判断した。そこで、弾性波の一つであるRayleigh波の速度に、非等方性の情報がどのように入り込んでいるかを摂動公式の形で示した。Rayleigh波とは、弾性体の自由境界表面の近傍を、実体波よりも遅い速度で伝播する典型的な弾性表面波のことで、弾性波動方程式の特殊解の一つとして表現される。Rayleigh波は他の弾性波と

比べ、境界表面に振幅が集中し減衰が少なく、正確に計測できる工学上の利点がある。

一方、Rayleigh波の観測においては、速度の他、振幅も観測される。そこで、振幅に関する物理量に対しても、非等方性の情報がどのように組み込まれているかの考察を計画した。これは、非等方性を生み出す要素の1つである残留応力に対する感度解析の結果(Rayleigh波速度よりもRayleigh波の振幅の方が残留応力に対しては感度が良いという数値実験結果Junge etc., Ultrasonics (2006))にも動機を得ている。

(2)導電体方程式に対する逆問題について

これは人体組織の体表面に配置した電極から微小電流を流し、その結果現れる体表面の電位分布により、組織内の導電率を決定し、組織の異常を推定するelectric impedance tomography (EIT)をモデル化した問題である。境界面での解のDirichlet値から境界面での解のNeumann値への写像をDirichlet to Neumann mapと呼ぶが、研究代表者は、これまで局所化されたDirichlet to Neumann mapから、境界での導電係数および境界法線方向の導電係数の導関数を再構成する公式を与え、その数値実験による検証を行ってきた。ただし、境界の形としては、平面、もしくは円に限られていた。一方、再構成される導電係数の値は、導電体自身の境界面の形状に対してきわめて不安定であることが数値実験で示されている(SIAM J. Appl. Math. 66 (2005))。そのため、境界面の形状を一般化して再構成公式を導くことを第一に計画した。またこのSIAMの論文は、境界面のそのものの正確な把握が重要であることを示唆しており、さらに踏み込んで境界面自身の形状をDirichlet to Neumann mapから決定できるかという問題を提起した。

2. 研究の目的

(1)弾性体方程式に対する逆問題について

①自由境界面でのRayleigh波の振幅にかかわる物理量としては、振幅の縦波成分と横波成分の比であるpolarization ratioおよび、縦波成分と横波成分間の位相差(phase shift)があげられる。そこで、非等方弾性体の自由境界面でのRayleigh波のpolarization ratioとphase shiftは、等方弾性体でのそれらの値からどれだけずれているかを、非等方弾性テンソルの一次の項までを含む摂動公式によって提示する(順問題)。

②「研究開始当初の背景」(1)①の最初に述べた弾性波の観測による弾性体の非等方性の決定問題に進み、Rayleigh波のもつ情報から、非等方性を再構成するための具体的なアルゴリズムを与えることを目標とする。すなわち、「研究開始当初の背景」(1)②で述べたRayleigh波速度の一次摂動公式、および上記①での摂動公式を基にして、非等方弾性体でのRayleigh波の速度、polarization ratio および phase shift の摂動から、非等方弾性テンソルを再構成することが可能かどうか吟味し、可能な場合はその具体的な手続きを与える(逆問題)。

③弾性テンソルが自由境界面から深さ方向に変化している場合を仮定する。これは、材料が厚さ方向に不均質であること、地球内部が層状に変化していることに対応する。このとき、非等方弾性体の表面を伝播するRayleigh波の速度、polarization ratio および phase shift の周波数に関する漸近展開式を求める。これらの漸近展開式の各項から、深さ方向の関数である弾性テンソルを再構成する手続きについて吟味する(順問題と逆問題)。

(2)導電体方程式に対する逆問題について

①切断面が任意形状の筒型導電体に対して、局所化されたDirichlet to Neumann mapから、境界での導電係数と、その境界法線方向の微分を再構成する公式を導き、数値実験で検証する。

②局所化されたDirichlet to Neumann mapから、導電体自身の境界曲率を再構成する公式を導き、導電体の境界面を近似的に再構成する。

3. 研究の方法

(1) 2007年度:

①弾性テンソルの21個の独立な摂動成分をもちいて、Rayleigh波のpolarization ratioとphase shiftの一次摂動公式を表現する。適宜、数式処理ソフトウェアをもちいて摂動公式の形を予想し、進展を促す。物質自身の対称性の他、材料の加工過程で生じる組織異方性(texture)、および残留応力による非等方性について、現象、理論、両面において信頼できる構成方程式を研究している海外共同研究者のC.-S. Manの協力を仰ぐ。

以上の研究内容について、6月11日~14日に行われるイギリス・Keele Universityでの国際研究集会EUROMECH Colloquiumおよび6月25日~29日に行われるカナダ・University of British Columbiaでの国際研究集会Conference on Applied Inverse Problemsに参加、研究討論、研究経過の報告

を行う。

②弾性テンソルが自由境界面から深さ方向に変化している場合に、弾性体方程式の作用素分解を行う。その際、研究分担者の中村玄の協力を得る。

③局所化されたDirichlet to Neumann mapからの導電係数の再構成において、仮定すべき最適な導電係数のregularityを考慮しつつ、再構成公式を導く。数値実験、数値解析では集中した討論が効果的なため、9月に海外共同研究者のS. Siltanenをフィンランド国タンペレ工科大学に1週間訪問し、再構成公式の改良、数値実験における最適な離散化について討論を行う。

(2) 2008年度:

①弾性テンソルが境界面からの深さ方向に非斉次とした場合に、変位と表面力との線形関係をあらわす代数量サーフェスインピーダンスの周波数に関する漸近展開公式(分散公式)を導出する。これより、Rayleigh波速度の分散公式導出の準備を行う。以上の目的のため、8月に連携研究者の中村玄を北海道大学に訪問、同時期開催の第33回偏微分方程式論札幌シンポジウムにて、研究討論、研究経過の報告を行う。

②9月に海外共同研究者のC.-S. Man教授を米国ケンタッキー大学に2週間訪問し、材料の加工過程で生じる組織異方性(texture)、残留応力による非等方性、および、弾性波の観測と分散からの非等方性同定の逆問題について研究討論を行う。

③10月に行われる中国・上海・復旦大学での逆問題に関する国際研究集会に参加、研究討論、研究経過の報告を行う。そこでは非等方弾性体の弾性波の分散、Dirichlet to Neumann mapからの導電係数の再構成、双方についての研究討論を行う。

(3) 2009年度:

①弾性テンソルが境界面からの深さ方向に非斉次とした場合に、変位と表面力との線形関係をあらわす代数量サーフェスインピーダンスの周波数に関する漸近展開公式(分散公式)を基に、Rayleigh波速度の分散公式導出を行う。ただちに一般の非等方弾性体に対して直ちに分散公式を得るのは困難が予想されるので、直交異方性をもった弾性体に対し、分散公式の最初の数項を計算する。随所に数式処理をもちい、研究の方向付けを行う。

②3月に海外共同研究者のC.-S. Man教授を

米国ケンタッキー大学に2週間訪問し、同時期に当地で開催予定の国際研究集会 American Mathematical Society, 2010 Spring Southeastern Sectional meeting の分科会 'Mathematical Problems in Mechanics and Materials Science' を組織し、そこにて Rayleigh 波の分散についての成果発表、および弾性波の観測と分散からの非等方性同定の逆問題について研究討論を行う。

③局所化された Dirichlet to Neumann map から、境界での導電係数およびその境界法線方向の微分を決定する逆問題において、境界面を一般化した際にその表現に使われる metric tensor が再構成公式にどのように関与するかを解析し、数値実験による再構成公式の検証を行う。

4. 研究成果

(1) 材料力学、地球物理等の分野では多くの非等方弾性体が扱われる。一方、非等方弾性体方程式は、最大 21 個の独立成分をもつ弾性テンソルをパラメータにもち、複雑な方程式系となる。Stroh formalism は、この非等方弾性体方程式に隠された純粋な構造を見出すもので、この formalism を基礎にして、非等方弾性体方程式を系統的に扱うことが可能となり、固体力学と波動伝播の解析、逆問題への応用等の研究が、国内外で活発に行われてきた。このような状況の下、Stroh formalism を総括することは、応用数学のみならず力学、数理工学、工学基礎分野の今後の研究に大いに資すると考えた。そこで Stroh formalism の本質を簡明に導入し、静弾性力学、動弾性力学への応用を、最近の研究結果も交えて著者独自のアプローチで解説する論文を完成させた ([雑誌論文]の③、[図書]の①、および[学会発表]の③)。以下に構成する3つの章の概略を述べる。

第1章においては、Stroh formalism の本質を静弾性(static elasticity)を対象にして述べた。弾性体の変形が2次元の場合、半空間における静弾性方程式の解は Stroh's eigenvalue problem とよばれる固有値問題に帰着される。そこでの固有ベクトルが、弾性変形における変位ベクトルと表面力ベクトルを並列したものに対応する。そこで、2次元変形が依存するところの平面(reference plane)内の回転に関して、Stroh's eigenvalue problem の固有ベクトルは不変に取ることができること、すなわち固有ベクトルの reference plane での回転不変性を著者独自の証明とともに強調した。この回転不変性を基礎にして、Barnett Lothe テンソルの導入とその積分表示、境界面の変位と表面力の線形対応をあらわす surface impedance tensor の reference plane での回転不変性の導出等を行った。第1章は既存結果の解説ではあるが、随所に著者独自のアプローチ、証明を含むものである。

第2章は、静弾性(static elasticity)に対する Stroh formalism の応用編である。ここでは、静弾性方程式に対する基本解(Green関数)の構成、力学信号と電気信号の相互作用までを考慮した圧電体方程式に対する Stroh formalism の拡張と基本解の構成、さいごに静弾性方程式に対する境界値逆問題を述べた。第2章の内容は、これまでの著者等の結果、および現在進行中の研究内容である。

第3章においては、Stroh formalism を動弾性(dynamic elasticity)に適用した。静弾性に対する Stroh formalism は、2, 3の注意点を除けば、ほぼ並行して動弾性に適用できる。第3章の強調点は Stroh formalism の弾性表面波(Rayleigh 波)への応用である。Rayleigh 波の存在、一意性の一般的議論とともに、等方弾性体、弱い非等方性を持った弾性体に対して、Rayleigh 波速度の導出方法を解説した。とくに、弱い非等方性を持った弾性体での Rayleigh 波速度は摂動論をもちいて導くが、Stroh formalism を応用することで計算手法が系統的に整理され、ここでの議論は以下の「研究成果」の(2)を実現するための基礎となった。

非等方弾性体方程式は多くのパラメータを含む複雑な方程式系であるという理由のため、微分方程式論からの研究は、これまであまり精力的になされてこなかったともいえる。一方、弾性論においては、非等性をもつ弾性体それぞれに固有な方法が勘案されているが、系統的な手法に結びつくとは言い難い。本研究は、工学における理論力学の分野と微分方程式論との橋渡しを目指し、非等方弾性体方程式の系統的な数学解析方法を提案するものであり、一方で具体的な「研究の目的」(1)の①②③の達成のために基礎的役割を果たすものである。

なおこの研究は、平成16年度～18年度の科学研究費補助金(基盤研究(C))「工学の基礎に現れる偏微分方程式に対する逆問題の解の構成」から引き続いて行われたものである。

この研究成果が出版された後約2年が経過したが、Stroh formalism に早くから注目し、固体力学、結晶論の著名研究者の1人である P.Chadwick 教授からは、Stroh's eigenvalue problem の回転不変性と特異性についての著者のアプローチを評価するコメントを得た。

(2) 弾性体のもつ非等方性が等方弾性テンソルからの摂動によって与えられるという設定の下、Rayleigh波の自由境界表面での polarization vector すなわち振幅における縦波成分の最大値と横波成分の最大値の比である polarization ratio、および振幅の縦波成分と横波成分間の位相差(phase shift)が、等方弾性体のときと比べてどう変化するか調べた。すなわち、弾性テンソルの非等方部分(摂動部分)が polarization ratio および phase shift の一次摂動に寄与する仕方を explicit な公式で表示した。ここで非等

方部分(振動部分)には完全な非等方性を仮定し、したがって 21 個の独立成分からなるが、polarization ratioの一次振動にはその中 4 個のみが、phase shiftの一次振動には 2 個のみが関与していることを突き止めた。これらの振動公式は、Stroh formalismを応用することで得られる。([雑誌論文]の①④等)。

自由境界表面上を伝播する Rayleigh 波の挙動を調べることで、弾性体の非等方性、不均質性を決定することは、地球物理、材料力学での重要な実際問題である。以上の結果は一次振動の範囲で、Rayleigh 波の観測から決まる種々の物理量から、弾性体の非等方性を決定する逆問題に方向性を示唆することで重要である。たとえば polarization ratio の一次振動には、非等方部分の中 4 個のみが関与しているという結果は、裏を返せば polarization ratio の一次振動を観測しても、非等方部分の中 4 個のみの情報しか得られないということの意味する。

このような考察から、以下(3)の、Rayleigh 波の観測から弾性体のもつ非等方性を決定する逆問題に応用し、一次振動の範囲でそれらの同定可能性について総括することができた。

(3)「研究開始当初の背景」(1)②で述べた Rayleigh 波速度の一次振動公式と、上記(2)の polarization ratio および phase shiftの一次振動公式から、弾性テンソルの非等方部分を決定する逆問題に応用した。上記(2)での Rayleigh 波は、自由境界表面上を一定の方向に進むと仮定している。そこで、Rayleigh 波を自由境界表面上、任意の方向に伝播させて、非等方部分の同定可能性を検証した。この場合、各一次振動公式には境界表面上での回転に関するテンソルの変換公式をもちいれればよい。したがって自由境界表面上 360 度の自由度をもつ伝播方向の Rayleigh 波の速度、polarization ratio および phase shiftの一次振動から得られる非等方部分の情報も増えると予想される。

得られた具体的な結果は、Rayleigh 波の速度、polarization ratioの一次振動からは非等方部分のうち特定の 5 個が同定可能、phase shiftの一次振動からは非等方部分のうち 4 個が同定可能で、それらは互いに交わらないというものである([雑誌論文]の①、[学会発表]の①等)。

本研究では弾性テンソルの非等方部分は完全な非等方であるとして、21 個の独立成分を系統的に扱っている。したがって、材料の製造、組み立て等の加工過程で弾性体の内部に生じた残留応力も、残留応力項として弾性テンソルの非等方部分に繰り込むことができ、観測から内部の残留応力の情報を得る非破壊検査での重要なテーマにも貢献できる。

(4)弾性テンソルが自由境界表面から深さ方向に不均質であるという設定の下、境界表面での Rayleigh 波の変位と表面力との線形関係をあらわす代数数量サーフェス インピー

ダンスの漸近展開公式の各項を求める手続きを与えた。Rayleigh 波速度に対して、高周波数に関する漸近展開公式(分散公式)の主要項と第二項を導出する手続きを与え、弾性体が直交異方である場合その具体的表示を試みた([雑誌論文]の②、[学会発表]の①②等)。

以上の結果は、弾性テンソルが与えられたとき Rayleigh 波の挙動を求める順問題に対応するが、一方、分散公式の各項において弾性テンソルの寄与の仕方が明確になれば、弾性テンソルが未知のとき、自由境界表面での Rayleigh 波の挙動から弾性テンソルの不均質性を決定する逆問題に大いに貢献できるものである。当初の「研究の目的」(1)の③は①②に比べ、多くの数学解析における困難が生じ、中途段階であるが、今後 Rayleigh 波を記述する弾性波動方程式に対する漸近解の正当性証明と分散公式の高次項の導出、非等方性による振動の導入、弾性テンソルのより精密な非等方性、不均質性決定逆問題への展開を計画している。

(5)局所化された Dirichlet to Neumann map から、境界での導電係数およびその境界法線方向の微分を決定する逆問題において、境界面の metric tensor をもちいた包括的な再構成公式を導出し、3次元空間内の筒型導電体に対し、数値実験にて再構成公式の有用性を検証した。以上の結果は国際欧文誌 Inverse Problems and Imaging に投稿中である。医療工学における、人体の表面での電圧測定により人体内部の導電率分布(異方性)を同定する逆問題に、数学解析の立場から応用面に踏み込んだ貢献が期待される。

一方得られた再構成公式は、metric tensor を通じて境界面の形状に関する情報を含んでいる。そこで境界面自身を再構成する問題にも適用できることが予想され、当初の「研究の目的」(2)の②の完成を計画している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Kazumi Tanuma and Chi-Sing Man, Perturbation formulas for polarization ratio and phase shift of Rayleigh waves in prestressed anisotropic media, Journal of Elasticity, Vol.92, 2008, pp.1-33 (査読有)

② Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man, Gen Nakamura and Shengzhang Wang, Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in anisotropic elasticity, 北海道大学数学講究録, No.135, 2008, pp.41-49 (査読無)

③ Kazumi Tanuma, Stroh formalism and Rayleigh waves (special invited exposition), Journal of Elasticity, Vol. 89, 2007, pp.5-154 (査読有)

④ Kazumi Tanuma and Chi-Sing Man, Perturbation of Rayleigh waves in anisotropic media, Journal of Physics: Conference Series 73 (012023), 2007 (電子ジャーナル)(査読有)

[学会発表] (計 8 件)

① Kazumi Tanuma, Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in prestressed anisotropic elastic media, 2010 Spring Southeastern Sectional Meeting of the American Mathematical Society, 2010. 3. 28, University of Kentucky (Kentucky, Lexington, USA)

② Kazumi Tanuma, Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in anisotropic elastic media: an application of the Stroh formalism, 2009 International Workshop on Differential Equations and Their Applications, 2009. 12. 19, National Cheng Kung University (台湾 台南市)

③ Kazumi Tanuma, Minicourse on Stroh Formalism and Rayleigh Waves, Mathematics Division, National Center for Theoretical Sciences, 2009. 5. 18-5. 22, National Taiwan University (台湾 台北市)

④ Kazumi Tanuma, Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in prestressed anisotropic elastic media, 2008 Taiwan-Japan Joint Workshop on Inverse Problem, 2008.12.1 中央研究院(台湾 台北市)

⑤ Kazumi Tanuma, Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in anisotropic elastic media, The International Conference on Inverse Problems and its Applications, 2008.10.12, 復旦大学(中国 上海)

⑥ Kazumi Tanuma, Perturbation and Dispersion of Rayleigh Waves in Anisotropic Elasticity, 第33回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 2008.8.27, 北海道大学(札幌)

⑦ Kazumi Tanuma, Perturbation of Rayleigh waves in prestressed anisotropic media, EUROMECH Colloquium 481: Recent advances in the theory and application of surface and edge waves, 2007. 6. 11, Keele University (Staffordshire, England)

⑧ Kazumi Tanuma, Perturbation formulas for phase velocity and polarization of Rayleigh waves in prestressed anisotropic media, International Conference on Applied Inverse Problems 2007, 2007.6.26, University of British Columbia (Vancouver, Canada)

[図書] (計 1 件)

① Kazumi Tanuma, Stroh Formalism and Rayleigh Waves, Springer, 2007, 163 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田沼 一実 (Tanuma Kazumi)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：60217156

(2) 研究分担者

中村 玄 (Nakamura Gen)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：50118535
(H20→H21：連携研究者)