

平成 22 年 6 月 4 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540115

研究課題名 (和文) 不連続ガレルキン法と事後誤差解析の研究

研究課題名 (英文) Study of the discontinuous Galerkin methods and their a posteriori error estimates

研究代表者

菊地 文雄 (KIKUCHI FUMIO)

東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：40013734

研究成果の概要 (和文) : 有限要素法に密接に関連する数値計算法として近年注目されている不連続ガレルキン法について, その理論的解析や新しい手法の開発と改良, 具体的問題への適用などの研究をし, 成果を得た. また, その事後誤差解析に関して, 必要とされる誤差定数を何個か明らかにし, その一部について具体的な値や上界を求めた. 数値例による検証も実施し, 理論結果の妥当性や新たな課題の発見, 本手法の可能性などに関する知見を得た. 特に, 不連続ガレルキン法は, 近似関数や要素形状の選択に関して自由度が高く, その点で従来の有限要素法を改良できる可能性があることなども判明した.

研究成果の概要 (英文) : The discontinuous Galerkin methods have recently drawn much attention as numerical methods closely related to the finite element methods. We have performed theoretical analysis of such methods, developed new methods, improved some methods, and applied them to some concrete problems. Moreover, we have listed up some error constants required for a posteriori estimates of such methods, and obtained concrete values or upper bounds for some of such constants. Numerical experiments were performed to see the validity of theoretical results and to find new research subjects, and we obtained some insights to the possibility of the considered methods. In particular, the discontinuous Galerkin methods are flexible in the selection of approximate functions and element shapes, so that they are expected to improve the existing finite element methods.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学, 解析学, 数値解析, 誤差解析, 有限要素法, 不連続ガレルキン法, 事後誤差評価, ハイブリッド変位法

1. 研究開始当初の背景

(1) 不連続ガレルキン法と呼ばれる、偏微分方程式等の数値解析手法が、特に海外において発展が著しかった。

(2) 他方、我が国ではこの分野の研究があまり進展しておらず、このままでは立ち後れる恐れが大きかった。

(3) この手法は従来の有限要素法の自然な拡張の一つになっており、また理論的にも実用的にも興味深い性質を有しており、研究価値が大きいと考えられる。たとえば、不連続面の数値的取り扱いなどに有効な可能性がある。

(4) 我々が有限要素法の開発や数理的解析において従来蓄積してきた手法や知識が有効に利用できる見込みがあり、従ってかなりの成果を得る可能性が大きいこと。

2. 研究の目的

(1) 不連続ガレルキン法の既存の定式化を整理し、特色、特長、問題点を明確にする。

(2) まず、最も基本的な不連続ガレルキン法である非適合1次要素について、その数学的構造を明らかにし、不連続ガレルキン法としての適切な定式化を探索し、事前・事後誤差解析に必要な諸定数の評価を行う。

(3) 次に基本となるポアソン方程式の境界値問題を対象に、従来の不連続ガレルキン法を整理すると共に、新しい手法が考案できないかを検討する。

(4) さらに、弾性問題、4階の偏微分方程式の境界値問題で記述される板曲げ問題、電磁場問題など、より実用的な問題に応用可能な独自の手法を開発し、解析、検証をする。

(5) 放物型方程式の初期値・境界値問題について、独自手法の開発と、作用素論的手法による解析をする。

(6) 不連続ガレルキン法による数値解の定量的な事前誤差評価と事後誤差評価手法の開発。

(7) 数値実験による検証をする。理論の有効性、妥当性の確認の意味でも不可欠である。

(8) 不連続ガレルキン法と事後誤差解析手法の実用化についての検討と考察をする。本手法は、未だ研究段階にあると思われるので、その汎用コードへの組み込みの技術や可能性等について研究する。

3. 研究の方法

(1) まず、文献を調査して在来の手法を整理・比較検討することから始める。学術論文のサーベイはもちろん、適切な成書の解説も有益である。そのための、資料収集・整理、書籍の購入も行う。

(2) 現時点では、不連続ガレルキン法に基づく有限要素スキームとしては、ペナルティ法や混合法などの定式化を想定し、さらに放物型問題については、作用素論的アプローチによる定式化を考えているが、研究の進展によっては、やや非標準的な手法についても考慮したい。この種の発展のための調査も必要である。

(3) サーベイの結果、既存の手法の中で有効と思われるものにつき、追試の数値実験を実施する。数値計算の性格上、数値解析機器を用いた数値実験は必要不可欠であり、それにより応用家・実務家と数理科学者のコミュニケーションも実のあるものとなる。そのため、計算解析装置（パーソナル・コンピューター）を導入する。また、プログラムのコーディングやデータ整理のために、計算言語ソフトウェアの導入や謝金を活用する。

(4) 予備的考察によれば、非適合有限要素法の不連続ガレルキン法としての定式化や誤差解析には、混合型有限要素法との関連付け、見直しが有効と考えられる。この点につき、研究代表者の経験を活かすとともに、国内旅費を利用して、国内関連研究者や来日中の海外研究者との研究交流、研究連絡を行う。

(5) 不連続ガレルキン法と事後誤差解析の対象としては、まずはポアソン方程式の境界値問題が基本となるが、ついで板曲げなどの弾性力学、電磁気学、流体力学等の問題、放物型方程式の初期値・境界値問題等が応用上からは重要である。これらの問題に対し、有効と考えられる不連続ガレルキン法と事後誤差評価手法を開発し、その数理的解析をする。これらの課題はいろいろな困難を有するが、それだけに鋭い数学的考察が必要であり、国内のみでなく、国外先進技術情報の取

集が有益であり、外国旅費を活用し、国際会議や国際ワークショップでの情報交換や研究発表を実施する。

(6) 前項の手法につき、数値実証実験を実施する。その際、計算解析装置をフルに活用して、手法の挙動、特色、有効性を明確にする。また、それに伴うデータ整理、資料整理、文書化などを本格的に実施する。

(7) 有限要素法の事後誤差評価手法を精査すると、特に弾性力学問題については、かつての応力法の技法を混合法と関連付けて転用できる可能性がある。科研費を利用し、先輩研究者から情報の教示を仰ぐと共に、現在の高度な文献検索機能も駆使して、遺漏なきよう努める。ただし、このような手法の有効性はかなり限定的であることも注意しなければならない。

(8) 電磁場問題の有限要素法では、他の分野とやや異なる定式化が利用されている。その中には、代表者による定式化も含まれており、いずれも辺要素や面要素の適用が本質的である。それは、現れる関数空間が擬ソボレフ空間であることなどに起因するが、それらの関数空間の特性の数学的解明は数値解析にとっても本質的な役割を果たす。まず、既存の諸結果について、十分に理解しておくことが重要で、その上で新しい可能性を探る。

(9) 事後誤差評価は、事前誤差評価と直接関係なく実行出来るものもあるが、しばしば事前誤差評価の結果も利用する。その際に、各種の正定数が現れ、事後評価では特にその出来るだけシャープな上界（と出来れば下界も）が必要である。この種の定数については、すでに代表者自身も一定の成果を得ているが、さらに十分に調査する。また、この件については、精度保証数値計算もきわめて有益と考えられ、この点についても資料収集と研究交流が必要である。

(10) 得られた成果は、国際会議等を含めて国内外で広く発表と公開に努める。そのために旅費を利用する。

(11) 結果の発表、公表に当たっては、プレゼンテーション用装置の利用、プレゼンテーション・ソフトウェアや図形可視化ソフトによる結果の表示は極めて有効であり、それらを導入し活用する。

(12) 成果については前記の学会等での発表だけでなく、研究成果報告書や学術論文等として公表する。

(13) 有効性が顕著と思われる手法については、実用プログラムへの装填が望ましい。有望な手法が得られれば、産業界での研究協力者を募り、実用化を目指す。そのためにも研究交流と研究発表は重要である。

4. 研究成果

(1) 基本的な不連続ガレルキン有限要素法について文献を検討し、その基本的な定式化や数理的性質を整理することが出来た。必要に応じ、追試の数値実験も実施した。特に、近似関数の選び方について、在来の有限要素法よりも自由度に富むが、反面、その制御には注意が必要なことなどが判明した。制御手段としては、安定化パラメータの選択やリフティング作用素の使用などが挙げられる。

(2) 非適合1次三角形有限要素につき、混合型有限要素法との関連を明らかにし、その事前および事後誤差評価と数値実験を実施した。その際、誤差定数の評価には、適合型三角形1次有限要素の誤差定数の解析で得られた結果や技法が役に立った。結果の一部は、国内外の学会、会議などで公表した。

(3) (1)の成果も参考にして、ハイブリッド型の不連続ガレルキン有限要素法を開発し解析した。ハイブリッド法としては、Pin Tongのハイブリッド変位法を採用し、それに安定化項もしくは内部ペナルティ項を付加して、数値的安定化を実現した。双1次形式として、基本的な対称なものと同様に非対称なものを比較し、非対称形式は安定化の面では有利だが、精度の点では問題があることが判明した。安定化項の大きさなどについても検討した。また、リフティング作用その併用も検討し、一部は実現した。これらの誤差解析や数値的検証の成果については、学会等での発表と共に、一部は学術論文として公表した。

(4) 基本的な不連続ガレルキン有限要素法および前項の手法につき、基礎的な数値実験を実施した。とくに、安定化項の係数の選び方、要素形状に対する数値解の挙動等について、具体的で有益な情報が得られ、非対称定式化やリフティング作用素を用いると、安定性の点では有利なことが確認できた。また、要素形状については、三角形や四辺形以外の多角形要素も実際に計算が可能で、得られた結果も妥当なことが確認できた。さらに、非凸な四辺形要素も利用できることが分かった。これらの成果は、要素分割の方法などに有益な情報を与えると期待でき、前項と同様に、学会発表や学術論文による公表をした。

(5) 事前および事後誤差解析が必要となる

誤差定数を数え挙げた上で、その具体的値や上界の決定を、三角形上の区分1次近似や区分定数近似について実行した。これらは、適合1次三角形要素や非適合三角形1次要素、不連続ガレルキン三角形1次要素などに適用できる。特に不連続ガレルキン要素については、辺上のトレースに関する定数の評価が必要で、このような定数については、良い上界を得るために、さらに研究が必要なが判明した。成果の一部は国際会議での発表や論文として公表された。

(6) 放物型方程式の数値解析に関しては、主に研究分担者の齊藤が、単独及び連立の放物型方程式について、様々な有限要素法に基づく近似解法を作用素論的に考察し、特に集中質量近似の利点などを明らかにし、論文等として公表した。事後評価誤差については、まだ予備的な結果しか得られていないが、必要な技法が次第に整いつつはある。

(7) 本方法のみならず有限要素法全般での計算で必要となる大規模な連立1次方程式の解法として、CG法を拡張した反復解法であるブロックCG法について、主に数値実験により検討した。本計算法は、複数の近似ベクトルを同時反復するもので、OpenMPなどを利用した並列計算に向いていると期待できるが、現時点では並列化の効果が十分には得られていない。結果の一部は口頭発表されたが、さらに検討と改良が必要と思われる。

(8) 本定式化は、まず2次元のポアソン方程式の境界値問題に対して実行したが、さらに固体力学の平面応力問題や平面ひずみ問題に対しても定式化し、有限要素プログラムを作成し、具体的な数値例を求めて有効性を検証、確認した。

(9) 本手法の実用化研究の一つとして、ピクセルやボクセル解法の改良を検討した。これらの手法は、多数の合同な長方形要素や直方体要素で解析領域を近似して計算するもので、境界付近の精度は落ちる欠点は要素を多く用いることでカバーしている。分割が単純なので、計算時間は小さくできる可能性がある。しかし、問題によっては境界形状の近似の悪さが致命的な場合もあるので、境界付近には不連続ガレルキン有限要素法を使用して精度を改良する方法を提案し試験する訳である。その際、(4)でも触れたように、任意の多角形要素や多面体要素が可能なが、大きな役割を果たしている。現時点では、2次元のピクセル解析に適用し、実際に境界付近の精度が改良できることを確認できた。結果の一部は学会で口頭発表しているが、今後の実用化のためには、さらに研究が

必要と考えられる。特に、3次元のボクセル解析では、本来のボクセル解析の利点である計算の単純さや計算時間の短さなどを大きく損なわないよう、実用的な境界近似法を慎重に検討し選択しなければならないと考えられる。なお、図1、2には、円孔を有する正方形領域の4分の1部分に対し、本来のピクセル分割と修正ピクセル分割の例を示した。後者では、正方形要素の他に、三角形、四角形、五角形の要素も現れている。

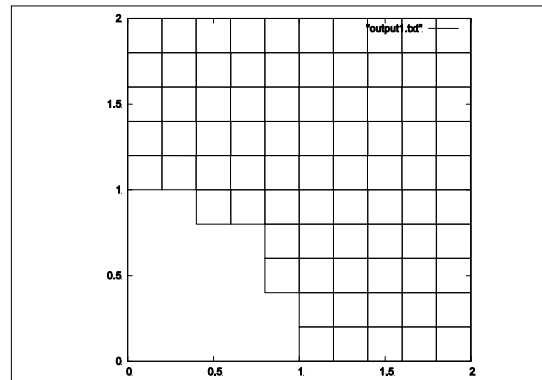


図1 ピクセル分割

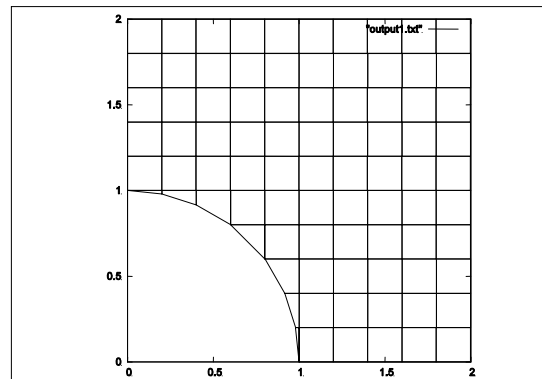


図2 修正ピクセル分割

(10) 研究の方法で挙げた各種の問題については、研究途上のものがかなりあり、未だ具体的な成果が得られていないものもある。例えば電磁場問題については、文献のサーベイや定式化の検討をしてきおり、その問題点の一つとして、3次元の六面体辺要素での精度不良が挙げられる。この欠点を不連続ガレルキン有限要素法で改良できないかという新たな課題が生じており、今後の研究が必要と思われる。

(11) ここで提案したハイブリッド型の不連続ガレルキン有限要素法は、独立に海外でも研究が進められていることが判明した。この分野のエキスパートである Cockburn 教授

が来日した折、情報交換や討論をすることが出来、国際交流にもなった。また、本研究の実用化に関しては、民間との共同研究も実施しており、将来の役に立つと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Xuefeng Liu, Fumio Kikuchi, Analysis and estimation of error constants for P_0 and P_1 interpolation over triangular finite elements, Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 査読有, Vol. 17, 2010, 掲載決定.
- ② Issei Oikawa, Fumio Kikuchi, Discontinuous Galerkin FEM of hybrid type, JSIAM Letters, 査読有, Vol.2, 2010, pp.49-52.
- ③ Fumio Kikuchi, Keizo Ishii, Issei Oikawa, Discontinuous Galerkin FEM of hybrid displacement type -- Development of polygonal elements --, Theoretical and Applied Mechanics Japan, 査読有, Vol.57, 2009, pp.395-404.
- ④ Norikazu Saito, Conservative numerical schemes for the Keller-Segel system and numerical results, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, Vol. B15, 2009, pp.125-146.
- ⑤ Katsushi Ohmori, Norikazu Saito, Some remarks on the flux-free finite element method for immiscible two-fluid flows, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol.232, 2009, pp.127-138.
- ⑥ 齊藤宣一: Keller-Segel 方程式の数値解析, 応用数理, 査読有, 19 巻, 2009, pp. 65-74
- ⑦ 菊地文雄, 有限と無限を結ぶ解析学, 数理科学, 査読無, 46 巻, 2008, pp. 46-51
- ⑧ Fumio Kikuchi, Hironobu Saito, Remarks on a posteriori error estimation of finite element solutions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol.199, 2007, pp.329-336.
- ⑨ Fumio Kikuchi, Xuefeng Liu, Estimation of interpolation error constants for the P_0 and P_1 triangular finite elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 査読有, Vol.196,

2007, pp.3750-3578.

- ⑩ Katsushi. Ohmori, Norikazu Saito, Flux-free finite element method with Lagrange multipliers for two-fluid flows, Journal of Scientific Computing, 査読有, Vol.32, 2007, pp. 147-173.
- ⑪ Norikazu Saito, Conservative upwind finite element method for a simplified Keller-Segel system modelling chemotaxis, IMA Journal of Numerical Analysis, 査読有, Vol.27, 2007, pp.332-365.
- ⑫ Norikazu Saito, On interpolation spaces in a polygon, 富山大学人間発達科学部紀要, 査読有, Vol.2, 2007, pp.7-12.
- ⑬ 林賢治, 齊藤宣一, 腫瘍の浸潤を記述する数理モデルへの差分法, 日本応用数理学会論文誌, 査読有, 17 巻, 2007, pp. 331-345.

[学会発表] (計 14 件)

- ① 菊地文雄, 不連続ガレルキン FEM の適用性の検討, 日本応用数理学会 2010 年研究部会連合発表会, 2010 年 3 月 9 日, 筑波大学筑波キャンパス.
- ② 菊地文雄, 有限要素の開発と解析 — 平板の曲げ問題の場合 —, 研究集会「数値シミュレーションの理論と実際」, 2010 年 2 月 16 日, 九州大学西新プラザ.
- ③ 菊地文雄, ブロック CG 法に対する数値実験, 加速法ワークショップ, 2009 年 11 月 27 日, 東京女子大学.
- ④ 菊地文雄, 有限要素法の開発と解析: ハイブリッド法, 混合法, 不連続ガレルキン法, 研究集会「数値解析の現状と展望」—九州大学数値解析セミナーとその協力者からの発信—, 2009 年 11 月 23 日, はこだて未来大学.
- ⑤ 菊地文雄, ブロック CG 法に関する若干の数値実験, 日本応用数理学会年会, 2009 年 9 月 28 日, 大阪大学豊中キャンパス.
- ⑥ 菊地文雄, ブロック CG 法に対する OpenMP の適用実験, 第 14 回計算工学講演会, 2009 年 5 月 13 日, 東京大学生産技術研究所.
- ⑦ Fumio Kikuchi, A discontinuous Galerkin FEM of hybrid displacement type, The First African Conference on Computational Mechanics, January 8, 2009, Sun City, South Africa.
- ⑧ 菊地文雄, 不連続ガレルキン FEM の誤差解析と誤差定数, 基盤(S)合同研究集会「流れ問題のための高品質数値解法と計算機援用解析学」, 2008 年 11 月 18 日, KKR

研究者番号：

- ホテル金沢.
- ⑨ 菊地文雄, ハイブリッド型不連続ガレルキン有限要素法, 日本応用数理学会年会, 2008年9月19日, 東京大学柏キャンパス.
 - ⑩ Norikazu Saito, Conservative finite element method for the Keller-Segel system, Mathematical Analysis for Self Similarity and Self Organization, 京都大学数理解析研究所, 2008年9月16-18日, 京都.
 - ⑪ Fumio Kikuchi, Estimation of error constants for the conforming and non-conforming P_1 triangular finite elements, The 2nd China-Japan-South Korea Conference on Numerical Mathematics, August 27, 2008, Weihai, China.
 - ⑫ Norikazu Saito, Conservative finite element method for the Keller-Segel system modeling chemotaxis, The 2nd China-Japan-South Korea Workshop on Numerical Mathematics, August 25-29, 2008, Weihai, China.
 - ⑬ Norikazu Saito, Upwind finite-element method for the Keller-Segel system in chemotaxis, INSF2007: International Conference on Recent Developments of Numerical Schemes for Flow Problems, 30years from upwind finite element methods, June 27-29, 2007, Kyushu University, Nishijin Plaza, Fukuoka, Japan.
 - ⑭ Norikazu Saito, Conservative finite element method for the Keller-Segel system modeling chemotaxis, 2007 Workshop on Mathematical Modelling and Analysis of Biological Pattern Formations and the Related Topics, September 25-26, 2007, Nagoya University, Nagoya, Japan.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

菊地 文雄 (KIKUCHI FUMIO)
東京大学・名誉教授
研究者番号：40013734

(2) 研究分担者

齊藤 宣一 (SAITO NORIKAZU)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：00334706

(3) 連携研究者

()