

平成 21 年 5 月 18 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540120

研究課題名（和文） 集合値写像の非線形スカラー化手法の研究と数理計画への応用

研究課題名（英文） Study on Nonlinear Scalarization Methods for Set-Valued Maps and its Applications into Mathematical Programming

研究代表者

氏 名：田中 環（TANAKA TAMAKI）

所 属：新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：10207110

研究成果の概要：

本研究では、集合値写像の非線形スカラー化手法の研究を行い、新たに統一的非線形スカラー化手法を提案してその有効性を確認し、数理計画問題への応用研究を行った。まず、大域的最適化手法を応用して非線形スカラー化関数値の計算方法を提案し、逐次数値計算によって近似するアルゴリズムを開発した。また、統一的非線形スカラー化手法におけるスカラー化関数について単調性や凸性に関する遺伝性が成立していることを明らかにした。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：集合値計画，非線形スカラー化関数，均衡問題，集合値最適化，ベクトル最適化，凸解析学，数理計画問題，大域的最適化

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 集合値写像の取り扱い、非線形解析学、凸解析学及び最適化理論の分野において従来から研究が進められてきた。「Set-Valued Analysis」(1990)で有名な Aubin, 「Convex Analysis and Nonlinear Optimization」(2000)で有名な Borwein, あるいは「Variational Analysis」(1998)で有名な Rockafellar の各グループに係する研究者

が精力的に研究を進めている。本研究で取り扱う非線形スカラー化関数については、むしろフランス・アヴィニオン大学の D.T.Luc, モロッコ・カディアヤド大学の H.Riahi, ドイツ・マーティンルーサー大学の C.Tammer の各グループの研究が先行している。特に、

- Göpfert, Tammer, Zălinescu によるベクトル値関数に対する Ekeland 型変分原理 (Nonlinear Anal., Vol.39, 909-922, 2000)
- Hamel と Löhne による集合値写像に対す

る Ekeland 型変分原理 (J.Nonlinear Convex Anal., Vol.7, 19-37, 2006)

で提案された非線形スカラー化手法は従来のスカラー化手法とは全く異なり、凸性等の無理な仮定をせず、抽象的な線形位相空間で結果を与えており、様々な理論的な応用や具体的な応用科学への利用が期待できる。

(2) 本研究代表者は、これらの分野の海外の研究者とも交流があり、次の国際学会での交流活動で情報交換を頻繁に行っている。

(a) 一般化凸性と一般化単調性に関する国際学会 (<http://www.genconv.org/>)

(b) 太平洋最適化研究活動団体 (POP) (<http://landau.ma.polyu.edu.hk/pop/>)

また、日本国内では、計画数学、最適化、数理計画を専門とする、日本数学会や日本 OR 学会所属の研究者がこれらに関係した研究を行っている。本研究代表者もこれまでベクトル最適化や集合値最適化の分野で、科学研究費補助金を利用して「ベクトル最適化の解析的研究」(奨励研究(A) 06740139, 0774013, 08740129, 09740129, 11740053, 基盤研究(C) 13640097) や「集合値写像の非線形スカラー化手法の研究と数理計画問題と統計科学への応用」(基盤研究(C)17540108) を行ってきた。アジアではこれらの分野に注目する研究者が多く、特に台湾からいくつかの国際会議に招待され、得られた成果に関する論文発表(招待講演)を行ってきた。

## 2. 研究の目的

集合値写像の非線形スカラー化手法の研究には多くの未解決部分が残されていると同時に、(集合値の)一般化均衡問題や Caristi の不動点定理などへの応用が可能である。基盤研究(C)17540108 では、それらの理論的解析を行い、具体的に計算機で計算シミュレーションを行うための逐次解法を実現する大域的最適化アルゴリズムの開発を研究分担者の山田准教授と共同で行ってきた。本研究では、これらを踏まえて Hamel と Löhne が提案した、いくつかの集合値写像に対する非線形スカラー化関数について理論的解析とその応用研究、および数値計算アルゴリズムの開発を行うことを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1)非線形スカラー化の遺伝的性質の調査：2006年に Hamel と Löhne が提案した数種類の非線形スカラー化関数に対して凸性・半連続性について同様の遺伝的性質が存在するかどうか調査する。

(2)集合値写像に対する Ekeland 型変分原理

の精密化：ベクトル値関数に対する Ekeland 型変分原理や集合値写像に対する Ekeland 型変分原理を古典的な Ekeland の変分原理の自然な解釈から改良を試みる。

(3)反対称律を仮定しない擬順序集合に対する極小値定理の調査・研究と応用：C.Tammer のグループが行ってきた一連の研究成果は、Zorn の補題の拡張である、Brézis-Browder の定理(1976)に基づいているものが多い。これらの結果と非線形スカラー化関数の関係を調査し改良点を探る。また、集合値写像に対する一般化均衡問題や Caristi の不動点定理、高橋の最小値定理への応用に取り組む。

(4)統計科学における多次元データへの応用研究：図1で示した非線形スカラー化関数は、特殊な集合値の場合は、有限回の逐次解法で最適解が計算できることが分かっている。そこで、磯貝教授と協力して、実際の多次元データの特徴解析、特に被験者の主観的データを特徴付けるためにデータそのものを取り扱う手法を提案する。

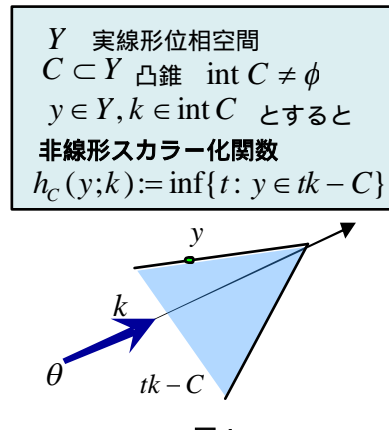


図1

(5)非線形スカラー化関数に関する計算アルゴリズムの開発：図1の非線形スカラー化関数の値を具体的に計算機で求めるためのアルゴリズムの開発を行う。計算シミュレーションを行うために、この逐次解法を実現する大域的最適化アルゴリズムを山田准教授と共に開発する。

(6)数理計画問題やゲーム理論への応用研究：集合値写像を含む数理計画問題の最適性条件の精密化を行い、これまでにモデル化の難しかった問題に応用することを試みる。そこで、谷野教授と協力して、従来の数理計画や多目的協力ゲームへの応用研究を行う。

## 4. 研究成果

(1) 大学院生との共同研究によって、ベクト

ル値関数に対する Ekeland の変分原理と関連する等価な定理に関する結果を得た。これらの成果について、台湾で開催された非線形解析学と凸解析学に関する第 5 回国際会議 (NACA2007) と神戸で開催された最適化の技術と応用に関する第 7 回国際会議 (ICOTA7) で発表を行い学術論文にまとめた。

(2) Hamel-Löhne(2006) が提案した、集合に対するスカラー化手法を统一的に論じることの出来るスカラー化関数 (Inf 型と Sup 型の 2 種類 6 タイプ。式 1 参照) を世界で初めて提案してその有用性を説いた。大学院生との共同研究によって、そのスカラー化関数について単調性や凸性の遺伝性が成立していることを明らかにし、台湾や日本で開催された国際会議 (GC9, SJOM2008, NAO-Asia2008) で発表を行い、学術論文にまとめた。

**(式 1) 統一的非線形スカラー化手法**

$$I_{k,V'}^{(j)}(V) := \inf \left\{ t \in R : V \leq_C^{(j)} (tk + V') \right\}$$

$$S_{k,V'}^{(j)}(V) := \sup \left\{ t \in R : (tk + V') \leq_C^{(j)} V \right\}$$

(j = 1, ..., 6), V と V' は集合

$\leq_C^{(j)}$  は Kuroiwa-Tanaka-Ha(1997) で定義された集合間の優劣を表す 2 項関係

(3) 山田准教授と大学院生との共同研究によって、包絡分析法や統計手法を利用して多次元データに関する評価方法の応用研究を行った。

(4) 山田准教授及び大阪大学谷野教授と、大域的最適化問題の本研究に関係した外部近似法についての共同研究を行った。NACA2007 で発表を行い、学術論文にまとめた。また、逆凸制約条件を持つ大域的最適化についての共同研究を行い、学術論文として国際会議の査読付会報に掲載された。また、そのリブシッツ関数に特化した最適化問題への応用研究を進め、国際会議 NAO-Asia2008 で発表を行って、学術論文として査読付会報に採択された。

(5) 山田准教授と、非線形スカラー化関数の値を実際に計算するための手法について共同研究を行い、逐次数値計算によって近似するアルゴリズムが開発できた。NACA2007 と ICOTA7 で発表を行った。また、その理論的部分を中国青島で開催されたゲーム理論と応用に関する第 2 回中国会議 (CMGTA'2007) で発表を行い、論文は刊行された単子本に採録された。

(6) 博士研究員との共同研究によって、ベクトル値関数に対する Cammaroto-Chinni 型の

定理を得ることができ、国際会議 NACA2009 で論文発表を行った。

(7) 本研究課題に関連して、次の海外の研究者との研究交流を行った。

分数計画問題の最適性条件に対して台湾中原大学の頼漢卿教授との共同研究。

ベクトル値関数に対する均衡問題に対して台湾中山大学の姚任之教授との共同研究。

2007 年 12 月に神戸で開催された国際会議 ICOTA7 では、海外から研究者を中心に 11 名を招待し、国内からの参加者 3 名を含めて特別セッションを主催することができた。

特に、スペインから参加したエルナンデス女史は、その後 2008 年 2 月に新潟大学に外国人客員研究員として約 1 ヶ月滞在して集合値計画問題に関する共同研究を行った。

また、米国から招待したゲオルギエフ氏とは、均衡問題に関する共同研究を行うことが出来た。

良設定問題 (Well-Posed Problem) に関する研究についてイタリア、パレ・ダオスタ大学の G.P. Crespi 氏から京都大学数理解析研究所で講演を行ってもらい専門的知識の提供を頂いた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

I. Kuwano, T. Tanaka, S. Yamada, Characterization of nonlinear scalarization functions for set-valued maps, to appear in the Proceedings of Nonlinear Analysis and Optimization, 査読あり。

S. Yamada, T. Tanaka, T. Tanino, A dual problem for a Lipschitz optimization problem, to appear in the Proceedings of Nonlinear Analysis and Optimization, 査読あり。

S. Yamada, T. Tanaka, T. Tanino, Outer approximation methods for solving a global optimization problem with reverse convex constraints, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 5, 201 - 218, Yokohama Publishers, 2008, 査読あり。

I. Kuwano, T. Tanaka, S. Yamada, Several nonlinear scalarization methods for set-valued maps, 京都大学数理解析研究所講究録, 1643, 75-86, 2009, 査読無。

Y. Araya, K. Kimura, T. Tanaka, Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle, Taiwanese Journal of Mathematics, 12(8), 1991-2000, 2008, 査読あり。

E. Isogai and A. Futschik, On the

convergence rate of sequential fixed-width confidence intervals for normal parameters, *Statist. Probab. Lett.*, 78(13), 1826-1834, 2008, 査読あり.

A. Shimizu and T. Tanaka, Minimal element theorem with set-relations, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 9(2), 249-253, 2008, 査読あり.

S. Yamada, T. Tanaka, T. Tanino, A successive approximation method for solving a Lipschitz optimization problem, *京都大学数理解析研究所講究録*, 1611, 18-25, 2008, 査読無.

L.-C. Zeng, T. Tanaka, J.-C. Yao, Iterative construction of fixed points of nonself-mappings in Banach spaces, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(2), 814 - 825, 2007, 査読あり.

T. Tanaka, S. Yamada, A characterization of efficient saddle point for set-valued maps, *Proceedings of the Second International Conference on Game Theory and Applications*, World Academic Press, 単子本 (ISBN 184626166X), 183 - 185, 2007, 査読無.

[学会発表] (計 23 件)

Tamaki Tanaka, On efficient saddle points for set-valued maps, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 30 日, 東京都, 東京工業大学.

Issei Kuwano, Inherited properties of unified types of scalarizing functions for sets, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 30 日, 東京都, 東京工業大学.

Akira Shimizu, Minimal element theorems for set-optimizations, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 30 日, 東京都, 東京工業大学.

Satoshi Washio, Improvement indices keeping the feasibility in data envelopment analysis, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 29 日, 東京都, 東京工業大学.

Syuuji Yamada, Improvements on an outer approximation method for solving a canonical d.c. programming problem, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 30 日, 東京都, 東京工業大学.

Yousuke Araya, On generalizing Cammaroto-Chinni's Theorem, The Sixth

International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 28 日, 東京都, 東京工業大学.

Tamaki Tanaka, A unified approach for scalarization on sets, 2008 Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization, 2008 年 12 月 18 日, 台湾台北市, 国立台湾師範大学

Issei Kuwano, Monotonicity of nonlinear scalarization functions for sets, The Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2008 年 9 月 17 日, 松江市, くにびきメッセ.

Tamaki Tanaka, A unified approach for scalarization on sets, The Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2008 年 9 月 15 日, 松江市, くにびきメッセ.

Syuuji Yamada, Inner approximation methods for solving a Lipschitz optimization problem with convex constraints, The Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2008 年 9 月 15 日, 松江市, くにびきメッセ.

Yousuke Araya, A strong vectorial Ekeland's variational principle, The Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2008 年 9 月 15 日, 松江市, くにびきメッセ.

Tamaki Tanaka, Several nonlinear scalarization methods for set-valued maps, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2008 年 9 月 1 日, 京都大学数理解析研究所.

Tamaki Tanaka, Computational algorithm for nonlinear scalarization methods on sets, The 4th Sino-Japanese Optimization Meeting, 2008 年 8 月 28 日, 台湾台南市, 成功大学.

Tamaki Tanaka, Several nonlinear scalarization methods on sets, 9-th International Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, 2008 年 7 月 24 日, 台湾高雄市, 中山大学.

Yousuke Araya, Ekeland's variational principle and its equivalent theorems in vector optimization, The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2007), 2007 年 12 月 15 日, 神戸国際会議センター.

Pando Georgiev, Nash equilibrium and loose saddle point theorems for multifunctions, The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2007), 2007 年 12 月 14 日, 神戸国際会議センター.

Tamaki Tanaka, Scalarization algorithm for set-valued maps with d.c. set images,

The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2007), 2007年12月13日, 神戸国際会議センター.

Tamaki Tanaka, A characterization of efficient saddle point for set-valued maps, The Second China Meeting on Game Theory and Applications (CMGTA2007), 2007年9月17日, 中華人民共和国青島市, 青島大学.

荒谷洋輔, ベクトル均衡点問題に対する Ekeland の変分原理, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2007年9月5日, 京都大学数理解析研究所.

山田修司, A successive approximation method for solving Lipschitz optimization problems, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2007年9月3日, 京都大学数理解析研究所.

<sup>21</sup> Yousuke Araya, Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle, The Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007), 2007年6月2日, 台湾新竹市, 清華大学.

<sup>22</sup> Syuuji Yamada, Successive approximation methods for solving a d.c. programming problem, The Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007), 2007年6月2日, 台湾新竹市, 清華大学.

<sup>23</sup> Tamaki Tanaka, Computational procedure on scalarization algorithm for set-valued maps, The Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007), 2007年5月31日, 台湾新竹市, 清華大学.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

田中 環 (TANAKA TAMAKI)  
所属 新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号 : 10207110

### (2)研究分担者

磯貝 英一 (ISOGAI EIICHI)  
所属 新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号 : 40108014

山田 修司 (YAMADA SYUUJI)  
所属 新潟大学・自然科学系・准教授  
研究者番号 : 80331544

### (3)連携研究者

谷野 哲三 (TANINO TETSUZO)  
所属 大阪大学・大学院工学研究科・  
教授  
研究者番号 : 50125605