様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月１８日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０１２２
研究課題名（和文）　位相空間上の連続関数の拡張問題への集合論の応用の研究
研究課題名（英文）　Set-theoretic approach to the extension problem of continuous functions on topological spaces

研究代表者
大田　春外　（OHTA HARUTO）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：40126769

研究成果の概要（和文）：本研究は，トポロジーのキー・ワードの１つである連続写像の拡張に関する研究である。特に，位相空間上の連続関数の拡張問題を集合論を応用することによって研究する。位相空間の任意の閉集合の可算局所有限開被覆が全体空間の可算局所有限開被覆に拡張可能であるためには，任意のσ-局所コンパクト距離空間との直積が矩形正規であることが必要十分であることを証明して，T. C. Przymusinski によって１９８３年に提起された問題を肯定的に解決した。

研究成果の概要（英文）：This is a research of extension of continuous mappings, which is one of key words of topology. In particular, we studied the extension problem of continuous functions on topological spaces by applying set theory. We solved affirmatively an open problem asked by T. C. Przymusinski in 1983 by proving that for a topological space X, every countable locally finite open cover of every closed set extends to a countable locally finite open cover of X if and only if the product X and Y is rectangularly normal for every σ-locally compact metric space Y.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：数学基礎論，位相空間，集合論，連続関数，拡張問題

１．研究開始当初の背景

位相空間論に集合論を応用する研究は 1970 年代から始められ，現在までに位相空間の性質に関する古典的な未解決問題の多くが，選択公理を含む通常の集合論の公理系 ZFC と独立であることが証明された．一方，幾何学的トポロジーや代数的トポロジーの研究に集合論が積極的に応用されることは

なかったが，幾何学的トポロジーの研究の第一人者である J. Dydak 氏は，1996 年に連続写像の拡張理論に関して「集合論的トポロジーと代数的トポロジーの接点」という副題を持つ論文（註１）を発表し，１の分解の拡張を媒介として，代数的及び幾何学的トポロジーのいくつかの問題が位相空間上の連続関数の拡張問題に翻訳できることを示した．一例として，未解決問題「距離位相を持つ単体的複体への写像に関してホモトピー拡張定理が成り立つか」は，次の問題１と同値であることが示された．

問題１. 位相空間 X の部分空間 A 上の任意の点有限１の分解が X 上の点有限１の分解に拡張されるとき, 単位閉区間 I との直積空間 $A\times I$ 上の任意の点有限１の分解はまた直積空間 $X\times I$ 上の点有限１の分解に拡張可能か.

このような翻訳は，幾何学的トポロジーや代数的トポロジーの研究に，位相空間論における集合論の研究の蓄積を生かすことを可能にする．実際，本研究代表者と研究分担者山崎(H20 より連携研究者)は上の問題１が，連続体仮説 CH の下で否定解を持つことを証明した（註２）．１の分解の拡張可能性については 1970 年代後半より，拡張理論に関するポーランドの中心的研究者であった T. C. Przymusinski 氏等によって，それが可算な１の分解の拡張可能性に還元できることが予想されていたが，前世紀中には証明されなかった．ところが，研究分担者山崎は 2004 年に点有限１の分解の拡張に関して可算還元定理が成立することを証明して，それが問題１の CH の下での否定解の鍵となった．我々の結果から，CH なしで否定解が得られるか，また CH の否定の下ではどのような現象が生じるかといった問題が自然に起るが，それらも本研究の目標の１つである．

註１． J. Dydak, Extension Theory: the interface between set-theoretic and algebraic topology, Topology and its Appl. **74** (1996), 225-258.
註２． H. Ohta and K. Yamazaki, Extension of point-finite partitions of unity, Fund. Math. **191** (2006), 187-199.

２．研究の目的

写像の拡張はトポロジーの研究におけるキー・ワードの１つである．特に，位相空間の部分空間で定義された実数値あるいはバナッハ空間等に値をとる連続関数（族）が全体空間上の連続関数（族）に拡張可能であるための条件に関する問題を，連続関数の拡張問題と総称する。本研究の目的は，幾何学的，代数的，及び集合論的トポロジーにおける様々な連続関数の拡張問題に対し，公理的集合論の成果を応用することによって解決を試みることである．

３．研究の方法

研究分担者（H20 より連携研究者）と情報交換，討議を行いながら研究を進めるため，静岡大学の他，横浜国立大学，筑波大学，高崎経済大学においてセミナーを開催した．特に，次の点に重点をおいて研究を実施した．

(1) 点有限１の分解に関する問題の否定解となる反例を連続体仮説を仮定することなく構成する．そのためにボレル階層の低いボレル集合の構造について研究する．また，局所有限１の分解の拡張に対する記述集合論の成果の応用の可能性を検討する．

(2) Elementary submodel は集合論的手法の中で，トポロジーへの応用がもっとも期待できるものである．応用集合論セミナーを開いて，この手法の使用法について習熟する．

(3) Elementary submodel を使って構成された位相空間の典型例である Z. Balogh による Dowker 空間の構造を解析する．この空間は先行研究の中で応用例がなく，成果がもっとも期待されるものである．本研究では，後述する T. C. Przymusinski と M. L. Wage による問題に対する反例を構成することが目標である．

(4) 集合論の応用として，第１可算公理を満たす位相空間上での実数値連続関数に関する拡張問題について研究する．先行研究である Kulesza-Levy-Nyikos の理論について検討を加えることから始める．本研究はすでに ZFC との独立性が証明されている命題「第１可算公理を満たす正規空間は族正規である」と密接に関連するので，その観点からの研究も行う．

４．研究成果

主な研究成果は以下の３点である．

(1) 可算 Katetov 空間の特徴付けに関する T. C. Przymusinski の問題の解決.

位相空間は，任意の閉集合の任意の可算局所有限開被覆が全体空間の可算局所有限開被覆に拡張可能であるとき，可算 Katetov 空間とよばれる．T. C. Przymusinki は 1983 年に，次の定理１が成立することを発表した．

定理１．位相空間 X が可算 Katetov 空間であるためには, 任意の σ-局所コンパクト距離空間 Y に対して, X と Y の直積空間が矩形正規空間であることが必要十分である．

ここで，X と Y の直積が矩形正規であるとは, X の任意の閉集合 A と Y の任意の閉集合 B に対して，A と B の直積上の任意の実数値

連続関数がXとYの直積への連続拡張を持つことをいう．Przymusinski はXが零次元の場合の証明を与えたが，零次元でない場合には非常に複雑な証明があると述べるに留めて，簡単な証明を与えよという問題を提起した．結局のところ定理１の証明は現在まで発表されず，定理は Przymusinski の予想と呼ばれるようになった．本研究では，研究代表者と V. Gutev 氏との共同研究（註３）によって開発された技法を用いることによって，空間Xが零次元であることを仮定することなく，定理１の証明を与えた．山崎によって定義された(ω, κ)-Katetov 空間に関する次の定理２は定理１の精密化である．また，応用として，下の定理３を得た．

定理２．位相空間 Xが(ω, κ)-Katetov 空間であるためには，任意の重さκ以下のσ-局所コンパクト距離空間 Yに対して，Xと Yの直積空間が矩形正規空間であることが必要十分である．

定理３．位相空間 Xと有理数空間 Q との直積空間が矩形正規であるためには，Xの任意の閉集合上の可算局所有限１の分解がX上の可算局所有限１の分解に拡張されることが必要十分である．

註３．V. Gutev and H. Ohta, Does C*-embedding imply C-embedding in the realm of products with a non-discrete metric factor?, Fund. Math. **163** (2000), 241-265.

(2) T. C. Przymusinski と M. L. Wage の未解決問題に関する考察．

局所有限１の分解の拡張と局所有限開被覆の拡張に関して，Przymusinski と Wage は 1980 年に次の問題２を提起した（註４）．ここで，Dowker 空間とは，可算パラコンパクトでない正規空間のことである．

問題２．①Katetov Dowker 空間は ZFC において存在するか．②任意の遺伝的族正規空間は Katetov 空間か．③族正規可算 Katetov 空間は Katetov 空間か．

Z. Balogh は Dowker 空間を構成する強力な方法を開発して，2001 年には連続体濃度の遺伝的族正規 Dowker 空間 Xを ZFC で構成した（註５）．この Dowker 空間 Xは可算 Katetov 空間であることが証明できる．したがって，もしXが Katetov 空間ならば，問題２①に対する肯定解が得られ，逆に，Xがそうでなければ，問題２②，③に対する否定解が得られる．本研究では，それを決定することは出来なかったが，拡張問題の研究における Balogh の Dowker 空間の重要性が明らかになった．

註４．T. C. Przymusinski and M. L. Wage, Collectionwise normality and extensions of locally finite coverings, Fund. Math. **109** (1980), 175-187.
註５．Z. Balogh, Dowker spaces and paracompactness questions, Topology and its Appl. **114** (2001), 49-60.

(3) 開集合の組み合わせ論的性質と関数列の収束に関する Scheepers 予想の研究（酒井政美氏との共同研究）．

位相空間 X から単位閉区間 I への関数列 $\{f_n\}$ が定値関数 0 に点ごとに収束することを $f_n \to 0$ によって表す．関数列に関して次の６つの性質を考える．関数列
(USC)：任意の上半連続関数列 $\{f_n\}$ に対し，もし $f_n \to 0$ ならば，連続関数列 $\{g_n\}$ が存在して，$f_n \leqq g_n$ かつ $g_n \to 0$ が成立する．
$(\mathrm{USC})_s$：任意の単調減少な上半連続関数列 $\{f_n\}$ に対し，もし $f_n \to 0$ ならば，$\{f_n\}$ の部分列 $\{f_i\}$ と連続関数列 $\{g_i\}$ が存在して，$f_i \leqq g_i$ かつ $g_i \to 0$ が成立する．
$(\mathrm{USC})_m$：任意の単調減少な上半連続関数列 $\{f_n\}$ 対し，もし $f_n \to 0$ ならば，連続関数列 $\{g_n\}$ が存在して，$f_n \leqq g_n$ かつ $g_n \to 0$ が成立する．

上の定義で，「上半連続」を「下半連続」で置き換えることにより３つの性質(LSC), $(\mathrm{LSC})_s$, $(\mathrm{LSC})_m$ を定義する．定義から直ちに次の関係が導かれる．

$$(\mathrm{USC}) \to (\mathrm{USC})_s \to (\mathrm{USC})_m$$
$$(\mathrm{LSC}) \to (\mathrm{LSC})_s \to (\mathrm{LSC})_m$$

以上の性質に関して次の定理を得た．

定理４．実数空間 **R** の部分空間に関して次が成立する．
① **R**の部分空間Xが(USC)を持つためには，X の任意の F_σ-集合が G_δ-集合であることが必要十分．
② 連続体仮説の下で，$(\mathrm{USC})_s \to (\mathrm{USC})$が成立しないことを示す例が存在する．
③ **R** の部分空間が$(\mathrm{USC})_s$を持つならば，その任意の自己稠密部分集合はそれ自身において第１類の集合である．

定理５．位相空間に関して次が成立する．
① 任意の正規可算パラコンパクト空間は$(\mathrm{USC})_m$を持つ．
② 任意のコンパクト空間に対して，(USC)を持つこと，$(\mathrm{USC})_s$を持つこと，および，scattered であることは同値である．
③ 任意の順序数空間は(USC)を持つ．

定理４，５の結果として，第１類の集合でない **R** の部分空間は，$(\mathrm{USC})_m \to (\mathrm{USC})_s$ が成立しないことを示す．位相空間が wQN 空間

であるとは，任意の連続関数列 $\{f_n\}$ に対し，もし $f_n \to 0$ ならば，$\{f_n\}$ が 0 に準正規収束する部分列を含むことをいう．M. Scheepers は組み合わせ論的性質 $S_1(\Gamma, \Gamma)$を持つ位相空間は wQN 空間であることを証明して，完全正規空間に対しては逆が成立することを予想した（註６）．もし任意の完全正規 wQN 空間が$(USC)_s$を持つならば，Scheepers 予想が肯定的に解決されることを証明したが，予想の証明には到達出来なかった．

定理６．性質(LSC), $(LSC)_s$, $(LSC)_m$ は同値である．(LSC)を持つ非可測濃度の位相空間は離散空間である．可測濃度の存在を仮定すれば，(LSC)を持つ離散でない位相空間が存在する．

註６．M. Scheepers, Sequential convergence in $C_p(X)$ and a covering property, East-west J. Math. 1 (1999), 207-214.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① Haruto Ohta and Masami Sakai, Sequences of semi-continuous functions accompanying continuous functions, Topology and its Applications, 査読有，Vol. **156**, 2009, pp.2683-2691.
http://hdl.handle.net/10297/3939
② Haruto Ohta, Przymusinski's characterization of countably Katetov spaces, Topology Proceedings, 査読有，Vol. **34**, 2009, pp. 147-159.
③ Haruto Ohta, Rectangular normality of product spaces, Questions and Answers in General Topology, 査読有，Vol. **27**, 2009, pp. 23-29.
④ Kaori Yamazaki, Locally bounded set-valued mappings and monotone countable paracompactness, Topology and its Applications, 査読有，Vol. **154**, 2007, 2817-2825.

〔学会発表〕（計２件）
① 大田春外，Sequences of semicontinuous functions accompanying continuous functions,日本数学会２００９年度秋季総合分科会，２００９年9月２６日，大阪大学豊中キャンパス．
② 大田春外，自己稠密可分距離空間の独立部分基底，日本数学会２００７年度秋季総合分科会，２００７年9月２３日，東北大学．

〔図書〕（計１件）
① Haruto Ohta and Kaori Yamazaki, Elsevier, Extension problems of real-valued continuous functions, in: E. Pearl (ed.) Open Problems in Topology II, 2007, pp. 35-45（総ページ数 763 頁）．

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~echohta/welcome.html

６．研究組織
(1)研究代表者
大田　春外（OHTA HARUTO）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：４０１２６７６９

(2)研究分担者
山田　耕三（YAMADA KOHZO）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：００２００７１７
（H19→H20：連携研究者）
玉野　研一（TAMANO KENICHI）
横浜国立大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：９０１７１８９２
（H19→H20：連携研究者）
山崎　薫里（YAMAZAKI KAORI）
高崎経済大学・経済学部・准教授
研究者番号：８０３０１０７６
（H19→H20：連携研究者）

(3)連携研究者