

平成 22 年 4 月 13 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2009

課題番号：19540125

研究課題名 (和文) マルコフ過程の境界問題と点過程

研究課題名 (英文) Boundary problem of Markov processes and point processes

研究代表者

福島 正俊 (FUKUSHIMA MASATOSHI)

大阪大学・名誉教授

研究者番号：90015503

研究成果の概要 (和文)：マルコフ過程 X が弱双対過程を持ち、高々可算個の境界点を持つ場合に、 X の生存時間を超えてのあらゆる可能なマルコフ的拡張で弱双対性を保存するものを、 X に内在的なフェラー測度と境界上の消滅と飛躍を表す独立なパラメーターによって完全に決定した。また飛躍パラメーターが零の場合に、そのような X の拡張をポアソン点過程を用いた1点拡張の繰り返しにより確率論的に構成した。

研究成果の概要 (英文)：Given a Markov process X with a weak dual process and countable boundary points, all possible Markovian extensions of X beyond its life time preserving the weak duality are characterized in terms of intrinsic quantities for X called Feller measures and independent parameters of killing and jumps on the boundary. Such an extension of X is constructed by repeating one point extensions by means of Poisson point processes of excursions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率論、マルコフ過程、点過程

1. 研究開始当初の背景

(1) マルコフ過程の境界問題は 1957 年に Feller が一次元拡散過程の最も一般的な境界条件を決定した直後に、マルコフ連鎖に対し、

境界が有限個の場合に提示したのに始まる。1970 年に伊藤清は一般の標準マルコフ過程に対して、その特定の1点の周りの excursions の値を取るポアソン点過程を

対応させたが、構成問題への応用は手付かずであった。その後マルコフ過程の一般論は国内外で大いに発展し、特に *excursion* の一般論や対称マルコフ過程論は成熟期を迎えていた。

(2) しかし、これらの成果や伊藤の方法を取り込んだ構成と特徴づけを含む境界問題への本格的取り組みが始まったのは最近のことであり、2004年から2006年にかけて集中した代表者と田中洋、J. Ying, P. He, Z.-Q. Chen氏等との共同による二つの異なる方向の研究結果を起点としている。

これら結果は共に対称マルコフ過程やそれより一般的な弱双対過程をもつマルコフ過程を対象としているが、一つは与えられたマルコフ過程1点拡張が、ある意味で一意的に定まる *excursions* 値のポアソン点過程によって構成可能であることを示したものであり、他の結果はマルコフ過程の準閉集合 F を台とする加法汎関数による時間変更過程のレヴィー測度を F の周りの *excursions* から定まるフェラー測度によって特徴づけたものである。

2. 研究の目的

(1) 境界 F が可算無限集合の場合に、 X の最も一般的な拡張を特徴づけること。 X は必ずしも対称であるとは仮定せず、ある測度に関して X が双対過程を持つようなより一般の場合を考察する。

(2) F が一般で X が対称なとき、 X の反射ディリクレ形式を用いて、その対称マルコフ拡張を特徴づけること。後者の生成作用素の定義域を定める付帯条件 (*lateral condition*) を適切に見出すのが問題である。

(3) 境界の外の X の *excursions* の値を取るポアソン点過程を構成し、それを繋いで X の拡張を構成すること。この操作を境界の各点ごとに繰り返すことによって (1) の特徴づけに従う拡張がうまく構成できることを保証する必要がある。

3. 研究の方法

本研究はワシントン大学の Z. Q. Chen 氏との密接な共同によって行われた。すでに1992年にChen氏は反射ディリクレ形式の概念の厳密な定式化を与えている。この概念は一般の対称マルコフ過程に対して、内在的に定義されるものであり、そのSilverstein拡大と呼ばれる対称マルコフ拡大の族の中で、ある意味で最大のものであることが知られている。

マルコフ過程 X の境界問題とは X のその生存時間を越えてのあらゆる可能なマルコフ的な拡張を解析的に特徴づけ、そのような拡張を確率論的に構成することである。従ってChen氏による反射ディリクレ形式の概念と、上述の研究開始当初の背景の (2) 項で述べた二つの研究結果を結合することにより、研究目的が確実に達成されるものと期待される。

4. 研究成果

研究目的の (1) に関しては、 X がある測度の関する弱双対過程を持ち、 X の見本路が有限生存時刻において可算集合 F に近づく場合には、弱双対性を保存するあらゆる可能な X のマルコフ的な拡張が、 X から内在的に定まるフェラー測度とそれと独立な F の各点での消滅、 F から F への飛躍を表すパラメータとによって完全に特徴付けられることを証明した。対応するレゾルベントの顕わな表現式も得られた。これらは W. Feller が1957年に提起した問題の現在の設定下での最終的な解決とみなされるものである。この成果は、Chen氏との共著論文 ② に発表された。

(2) に関しては X が対称マルコフ過程で、 F が一般なとき、Chen氏により定式化された X の反射ディリクレ形式のみを用いて、関数の F に関するフラックスという概念を導入した。これは関数の境界での法線微分概念の一般化である。 X の可能な対称でマルコフ的な拡張の生成作用素 A は、反射ディリクレ形式の定める対称作用素の制限となっている。この制限は付帯条件と呼ばれ、それを定めることと、 X の可能な対称マルコフ拡大を特徴付けることとは同値である。本研究において、付帯条件がフラックスと、それと独立な境界上のいくつかのパラメータを含む等式として記述された。この成果はChen氏との共著論文 ④ に発表された。

(3) については、 X が弱双対過程をもち、 F が可算無限集合の場合に、 F の各点の周りの X の *excursions* の値を取るポアソン点過程による1点拡張を繰り返すことにより、境界から境界への飛躍がなく弱双対性を保存するような X の最も一般的な拡張を構成することに成功した。その成果は、Chen氏との共著論文 ② の後半で発表された。

またポアソン点過程による構成は、空間の幾何学的構造にあまり依存しないため、このような拡張の構成は、互いに共通部分を持たない幾つかの非可算領域のそれぞれを1点とみなして得られる可算集合を F と考えることによっても実行可能である。この操作

は穴繕い (darning) と呼ばれる。更に X の状態空間が非連結な場合には、 X を対称化する測度は一意的ではないので、同じ X の対称的拡張は多様となり、それらは X の歪拡張と呼ばれる。これにより歪ブラウン運動として知られていた拡散過程の構成的構造も明らかになった。また X が対称な場合には、多くの場合にディリクレ形式の正則化という方法により、 X の拡張の解析的な構成も可能である。このような多点拡張めぐる興味深いいくつかの新たな知見は Chen 氏との共著論文 ③ にまとめられた。

マルコフ過程 X の状態空間が必ずしも 1 次元的ではなくても、上の穴繕いの例のように、その境界 F が有限か、もしくは可算無限集合である場合が自然に現れる。特に 3 次元以上のユークリッド空間の非有界な閉領域上の反射壁ブラウン運動を適当に時間変更して得られるマルコフ過程 X は有限個の境界点を持つことがあり、Chen 氏との共著論文 ⑤ では境界点が 1 個の場合が考察され、 X の対称拡大の一意性が反射ディリクレ形式をもちいて証明され、更に論文 ⑦ では境界が 2 個の場合が扱われ、 X の可能な拡張の全体が特定された。

このように F が可算であるという問題設定でも、興味深い応用は豊富である。しかし F が非可算無限である一般の場合にも、同様な X の拡張の確率論的構成を求めるのが望ましい。しかし excursions に値を取る点過程は定式化可能ではあるが、それは一般にはポアソン過程にならない。 X の拡張の確率論的構成を X の excursion 値の点過程と、境界 F 上の時間変更過程に相当するマルコフ過程を用意して、それらを結合させることによって構成することは将来に残された課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① M. Fukushima, From one dimensional diffusions to symmetric Markov processes, *Stochastic Processes and their Applications*, 査読有 120, 2010, 590-604
- ② M. Fukushima, On extended Dirichlet spaces and the space of BL functions, in 'Potential Theory and Stochastics in Albac', Eds. D. Bakry, L. Beznea, N. Boboc, M. Roeckner, 査読有、Theta Foundation, Bucharest, AMS International Book Series, 2009.

101-110

- ③ Z. -Q. Chen, M. Fukushima, On unique extension of time changed reflecting Brownian motions, *Ann. Inst. Henri Poincare, Probab. Statist.*, 査読有、45, 2009, 864-875
- ④ Z. -Q. Chen, M. Fukushima, Flux and lateral conditions for symmetric Markov processes, *Potential Analysis*, 査読有、29, 2008, 241-269
- ⑤ Z. -Q. Chen, M. Fukushima, One-point extensions of Markov processes by darning, *Probability Theory and Related Fields*, 査読有、141, 2008, 61-112
- ⑥ Z. -Q. Chen, M. Fukushima, On Feller's boundary problem for Markov processes in weak duality, *Journal of Functional Analysis*. 査読有、252, 2007, 710-733
- ⑦ Z. -Q. Chen, M. Fukushima, J. Ying, Extending Markov processes in weak duality by Poisson point processes of excursions, in: *Stochastic Analysis and Applications*, The Abel Symposium (Eds) F.E. Benth; G. Di Nunno; T. Lindstrom; B. Oksendal; T. Zhang, 査読有、Springer, 2007, 153-196

[学会発表] (計 4 件)

- ① 福島正俊, From transience to recurrence via reflection, Workshop on Stochastics and Real World Models, 2009年5月28日, Bielefeld University, Germany
- ② 福島正俊, On Ito's one point extensions of Markov processes, Symposium in honor of Kiyosi Ito, 2008年7月10日, National University of Singapore
- ③ 福島正俊, Levy systems and Feller measures for Markov processes, *Potential Theory and Stochastics*, 2007年9月5日, Alback, Romania
- ④ 福島正俊, Recent progress on boundary theory of Markov processes, The 5-th Workshop on Markov processes and related topics, 2007年7月14日, 北

京師範大学、北京

[図書] (計 1 件)

- ① 福島正俊、竹田雅好、培風館、マルコフ
過程、2008, 293 頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福島 正俊 (FUKUSHIMA MASATOSHI)

大阪大学・名誉教授

研究者番号：90015503

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：