

平成22年 5月28日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540126

研究課題名 (和文) 存在閉モデルの研究とその応用

研究課題名 (英文) Study of existentially closed models and its applications

研究代表者

桔梗 宏孝 (KIKYO HIROTAKA)

神戸大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：80204824

研究成果の概要 (和文)：2次方程式の実数解の存在条件は係数の不等式で書けるが、この性質を一般化したQEという性質について、順序加群と呼ばれる構造で調べ、QEをもつ順序加群の直積が再びQEをもつ場合をほぼ解明した。ランダムグラフに対応するBaldwin-Shelahのジェネリック構造というものがあり、そこで成り立つ性質は、ある簡単な形の条件式で公理化できることを一般的な場合について証明した。無限順序がある状況でも、自己同型を小さいモデル上へ制限したときの様子を決めておくと、ジェネリック自己同型のクラスが初等的になる場合があることを示した。

研究成果の概要 (英文)：The existence condition for real solution of a quadratic equation can be written by a simple inequality on coefficients. This property is generalized to a property called QE. We clarified when a product of ordered abelian groups has QE. There are Baldwin-Shelah generic structures corresponding to random graphs. We proved that the statements valid in such a structure can be axiomatized by conditions of a simple form. Even with the existence of an infinite order, if we specify the restriction of an automorphism to a fixed small model, then we found an example where the class of generic automorphisms is elementary.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数学一般 (含確率論・統計数学)

科研費の分科・細目：数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：存在閉モデル, モデル完全, 存在記号の消去, ジェネリック構造, 自己同型, 順序構造, 木構造, 順序加群,

1. 研究開始当初の背景

(1) 正標数の幾何的 Mordell-Lang 予想や  $p$ 

進閉体に対するポアンカレ級数の有理性がモデル理論の手法を用いて証明された。これ

らの証明では、モデル完全性と呼ばれる性質をもつ公理系が重要であった。モデル完全な公理系は、多くの場合、もう少し弱い公理系に対する存在閉モデルと呼ばれる構造のクラスを規定するものである。典型的なものは代数構造の体のクラスにおける代数的閉体が存在閉モデルである。

(2) 応用では、体の構造で、微分演算子、付置、自己同型を考えたものの存在閉モデルが一階の公理系で規定できるときが重要であった。存在閉モデルのクラスが一階の公理系で規定できるとは限らない。任意の構造において自己同型を考慮ことができ、ごく弱い仮定のもとで存在閉モデルはたくさん存在する。しかしながら、もとの構造が不安定の場合、かなり一般的な仮定のもとで自己同型の存在閉モデルのクラスは一階の公理系では規定できないことを研究代表者は過去に示している。

## 2. 研究の目的

(1) 与えられた構造に自己同型や適当な部分集合を新たに構造として加えたとき、体における代数的閉体に対応するようなモデル(存在閉モデル)のクラスがどのようなものか研究する。

(2) 自己同型や述語による拡張をしたあとの存在閉モデルにおいて、新たに定義可能になる集合がどのようなものかを研究する。

## 3. 研究の方法

(1) 単純理論の視点からの研究, Generic 構成法との関連の研究, 代数との関わりの研究という3つの分類を考えて研究を行った。

(2) 連携研究者との会合は主に法政大学市ヶ谷キャンパスで行い、東海大学代々木キャンパス、筑波大学でも行った。

(3) 次のような国内のモデル理論の研究集会に関連する研究者に来てもらい、研究打ち合わせを行った。

・モデル理論夏の勉強会 2007, 筑波大学, 2007年8月6日~8月8日

・RIMS 研究集会, モデル理論の手法による無限構造の構成法, 2007年10月29日~11月1日

・鹿児島モデル理論研究集会, 鹿児島国際大学 728 教室 2009年2月23日-2月25日

・「モデル理論とその周辺」研究集会, 神戸大学 2009年11月27日~22月29日

・Model Theory Kirishima 2010, New developments of "independence" in model theory, 3/1-5, 2010.

(4) 海外の研究者と意見交換をしたり、成果を発表するために次のような海外の研究集会に参加した。(先方の予算で行ったものは掲載していない。)

・Around Classification Theory Workshop, University of Leeds, 6/27-30, 2008.

・Stability Theoretic Methods in Unstable Theories (Workshop), The Banff International Research Station, 2/9-13, 2009.

## 4. 研究成果

(1) 順序加群の直積と存在記号の消去(QE)の可能性の関係について新たな結果が得られた。QE 可能な構造は存在閉モデルであることが知られている。存在記号の消去が可能であるとは、実数係数の2次方程式の解の存在条件が係数に関する不等式で表現できるように、ある種の存在条件が簡単な形で表すことができるということである。余分な定数と関係の構造をもつ QE 可能な順序加群と加除加群との直積も QE 可能なことが知られていたが、直積の定義を少し一般化した場合において、加除加群の代わりに正則加群やZ加群と呼ばれるものを考えても同様の結果が得られることを示した。

さらに、特別な正則加群の場合を除いて、QE 可能な加群同士の直積も QE 可能になることを示した。

(2) 任意の構造は、自己同型写像を新たな構造として考えることができ、このように構造を拡張して得られるクラスにおける存在閉モデルが考えられる。このクラスを一階の論理式で公理化できるかどうかという問題に関連して、次のような結果を得た。

自己同型写像の融合性のいくつかのバリエーションを考え、その中で一番強い意味で自己同型写像の融合性をもたない例を2項グラフで strict order property をもつように作った。他に simple unstable of SU-rank 1 の Hrushovski の例があるが、それも Mekler の方法で2項グラフに変換しても同じ性質をもつことがわかった。また、副産物として、quasi-generic class という有限構造のクラスを定義し、その quasi-generic structure という概念をつくり、その存在と可算範疇性、さらにモデル完全性を示した。quasi-generic structure では必ずしも量記号消去が可能とは限らない。

(3) 全順序のはいった2つの順序加群H, Kに対し、辞書式順序積 $H \times K$ が定義されるが、Hに余分な定数や関係の構造がある場合にもある程度自然な順序積が考えられる。

HとKそれぞれで成り立つ論理式の集合(理論と呼ぶ)を生成する公理系が与えられ

たときに、この順序積構造の理論が具体的に公理化できることはHとKにおける存在記号の消去が可能という仮定のもとで証明されていたが、この仮定なしに、HとKの理論からこれらの順序積構造の理論が具体的に公理化できることを示した。

(4) グラフ構造に対し、「頂点の個数一辺の個数」を前次元と呼び、どの誘導部分グラフに対しても前次元が0以上になるような有限グラフの全体を考えると、これらをうまく貼り合せてジェネリック構造と呼ばれるよい性質をもった構造が構成できる。

「辺の個数」に実数の重みをつけて引いたものを前次元として同様のクラスを考えてもジェネリック構造が構成できる。重みが無理数の場合には、ジェネリック構造の理論が任意存在形の論理式で公理化できることが知られていたが、重み有理数であっても、ジェネリック構造の理論が任意存在形の論理式で公理化できることの証明を行った。

(5) 一階の公理系  $T$  に対し、 $T$  のモデル  $M$  とその自己同型  $\sigma$  の組  $(M, \sigma)$  のクラスを考える。 $T$  が不安定の場合に、この構造のクラスにおける存在閉モデル全体のクラスは一階の公理系をもたない場合がほとんどという結果を過去に得ているが、 $T$  のモデル  $M_0$  とその自己同型  $s$  を一つ固定し、 $(M_0, s)$  の拡大だけに制限した部分クラスを考えた場合どうなるかという問題について研究し、次の結果を得た。

(a)  $M_0$  に定義可能な推移的順序  $<$  があり、 $a < s^n(a)$  となる  $M_0$  の要素  $a$  と自然数  $n$  が存在する場合、 $(M_0, s)$  の拡大クラスにおける存在閉モデルのクラスは一階の公理系をもたない。

(b) 次の場合、 $M_0$  の自己同型  $s$  をどのように与えても、 $(M_0, s)$  の拡大のクラスにおける存在閉モデルのクラスは一階の公理系をもたない。

(i)  $M_0$  がランダムグラフの場合。ジェネリック構成法により得られる組み合わせ論的な不安定構造についても同様のことが言えるようである。

(ii)  $M_0$  に全順序が定義できる場合。

(iii)  $M_0$  が  $n$  分木の場合。

(iv)  $M_0$  が無限分岐木の場合。

(4)  $M_0$  が有限分岐木で、深くなるほど分岐の数が多くなる場合、自己同型  $s$  をうまくとると、存在閉モデルのクラスが一階の公理系をもつ。自己同型  $s$  として、各レベル(根からの郷里)での軌道の大きさが次第に大きくなるようなものをとればよい。Witt Vector 上で Witt-Frobenius 写像を考えた構造(離散付値、剰余体、値群も構造と考える)もモデ

ル完全であることが知られているが、状況に類似性があり、何らかの一般化が期待される。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① K. Ikeda, A remark on generic structures and the number of countable models, Proceedings of the 10th Asian logic conference, World Scientific (2010), 214-226, 査読有り.
- ② K. Ikeda, H. Kikyo and A. Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, Journal of Symbolic Logic 74, no. 3 (2009), 721-733, 査読有り.
- ③ A. Tsuboi, A note on Steinhorn's omitting types theorem, Colloq. Math. 115, No. 2 (2009), 189-194, 査読有り.
- ④ S. Ibuka, H. Kikyo, H. Tanaka, Quantifier elimination for lexicographic products of ordered abelian groups, Tsukuba Journal of Mathematics, Vol. 33, No. 1 (2009), 95-129, 査読有り.
- ⑤ S. Ibuka, M. Kikuchi, H. Kikyo, On Characteristic Constants of Theories Defined by Kolmogorov Complexity, 15th International Workshop, WoLLIC 2008 Edinburgh, UK, July 1-4, 2008 Proceedings, LNAI 5110, (2008), 218-225. 査読有り.
- ⑥ A. Tsuboi, Models omitting given complete types, Notre Dame J. Formal Logic 49, No. 4 (2008), 393-399, 査読有り.
- ⑦ B. Kim, A. Kolesnikov, A. Tsuboi, Generalized amalgamation and  $n$ -simplicity, Ann. Pure Appl. Logic 155, No. 2 (2008), 97-114, 査読有り.
- ⑧ H. Kikyo, On the Amalgamation Property for Automorphisms, 数理解析研究所講究録 1602 (2008), pp. 93-102, 査読無し.
- ⑨ H. Kikyo, On central gap numbers of symmetric groups, Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 50 (2008), 63-84, 査読有り.
- ⑩ K. Ikeda, A note on independence in generic structures, 京都大学数理解析研究所講究録 1602 (2008), 22-25, 査読無し.
- ⑪ 板井昌典, 解析的ザリスキー構造と Chow の定理, 数理解析研究所講究録 1602 (2007), 64-69, 査読無し.

- ⑫ 桔梗宏孝, ベクトル空間のgeneric自己同型, 数理解析研究所講究録 1555 (2007), 49-56, 査読無し.
- ⑬ 板井昌典, 非代数的ザリスキー幾何, 数理解析研究所講究録 1555 (2007), 40-48, 査読無し.
- ⑭ K. Ikeda, A note on stability spectrum of generic structures, 京都大学数理解析研究所講究録 1555 (2007), 104-109, 査読無し.

[学会発表] (計 20 件)

- ① 桔梗 宏孝, 自己同型写像のモデル随伴理論について, 特別講演, 2010 日本数学会年会, 2010 年 3 月 24 日, 慶應義塾大学.
- ② M. Itai, Model theory of analytic Zariski structures, 2010 日本数学会年会, 2010 年 3 月 24 日, 慶應義塾大学.
- ③ H. Kikyo, On model companions of an automorphism, Model Theory Kirishima 2010, 京都大学RIMS合宿型セミナー, 2010 年 3 月 2 日, 旅行人山荘 (霧島).
- ④ M. Itai, Model theory of analytic Zariski structures, Model theory Kirishima 2010, 京都大学RIMS合宿型セミナー, 2010 年 3 月 5 日, 旅行人山荘 (霧島).
- ⑤ A. Tsuboi, "On coheir extentions", Model Theory Kirishima 2010, 京都大学 RIMS合宿型セミナー, 2010 年 3 月 3 日, 旅行人山荘 (霧島).
- ⑥ K. Ikeda, Stability spectrum of ab initio generic structures, Model Theory Kirishima 2010, 京都大学RIMS合宿型セミナー, 2010 年 3 月 5 日, 旅行人山荘(霧島).
- ⑦ 池田宏一郎, 安定性理論とジェネリック構成法, 「モデル理論とその周辺」研究集会, 2009 年 11 月 28 日, 神戸大学.
- ⑧ 桔梗宏孝, 坪井明人, 不安定性と自己同型写像のクラスについて, 2009 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学.
- ⑨ 池田宏一郎, Baldwinの予想について, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学.
- ⑩ 坪井明人, On Average Types, 2009 年度モデル理論サマースクール, 2009 年 8 月 27 日, 和歌山市民会館.
- ⑪ 桔梗宏孝, ある木構造のジェネリック自己同型について, 2009 年度モデル理論サマースクール, 2009 年 8 月 28 日, 和歌山市民会館.
- ⑫ H. Kikyo, Instability and Generic Automorphisms, Logicum Urbanae

Lugduni, 2009 年 7 月 7 日, Lyon大学, France.

- ⑬ 桔梗宏孝, 順序加群の直積について, 日本数学会年会, 2009 年 3 月 26 日, 東京大学.
- ⑭ 桔梗宏孝, 不安定構造のgeneric自己同型, 2009 年 2 月 24 日, 鹿児島モデル理論研究集会, 鹿児島国際大学.
- ⑮ K. Ikeda, On generic structures closed under subgraphs and free amalgamation, RIMS研究集会「モデル理論とその代数への応用」, 2008 年 11 月 11 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑯ K. Ikeda, On saturated generic structures, 招待講演, The 10th Asian Logic Conference, 2008 年 9 月 6 日, Kobe University,
- ⑰ H. Kikyo, On the AE-axiomatization of generic structures, Around classification theory Workshop at the School of Mathematics, University of Leeds, 2008 年 6 月 27 日.
- ⑱ 桔梗宏孝, 池田宏一郎, 自己同型写像の融合可能性について, 日本数学会年会, 2008 年 3 月 26 日, 近畿大学.
- ⑲ 桔梗宏孝, 自己同型写像の融合性について, RIMS共同研究「モデル理論の手法による無限構造の構成法」, 2007 年 11 月 1 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑳ 桔梗宏孝, 井深真悟, 田中広志, 順序加群の直積と量記号消去, 日本数学会秋季総合分科会, 2007 年 9 月 23 日, 東北大学.

[図書] (計 1 件)

- ① T. Arai, J. Brendle, H. Kikyo, et al Ed., Proceedings of the 10<sup>th</sup> Asian Logic Conference, World Scientific, Singapore, 2010, 393 頁.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

桔梗 宏孝 (KIKYO HIROTAKA)  
神戸大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：80204824

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

板井 昌典 (ITAI MASANORI)  
東海大学・理学部・教授  
研究者番号：80206361

坪井 明人 (TSUBOI AKITO)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授  
研究者番号：30180045

池田 宏一郎 (IKEDA KOICHIRO)  
法政大学・経営学部・教授  
研究者番号：60332029