様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 5 月 24 日現在

研究種目： 基盤研究（C）
研究期間： 2007 ～ 2009
課題番号： 19540129
研究課題名（和文） 条件付確率過程の分布に境界の状態が与える影響の解明

研究課題名（英文） Research about effects of boundary states on conditional distributions

研究代表者 富﨑 松代（TOMISAKI MATSUYO）
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号：50093977

研究成果の概要（和文）：調和変換の手法は、グリーン核や拡散過程を取り扱う分野において用いられ、その性質の解明に活用されている。この場合、グリーン核や拡散過程は「最小」のものに限られている。しかし、集団遺伝学のような応用分野においては、必ずしも「最小」の確率過程を取り扱う訳ではない。本研究課題では、「最小」ではない広義拡散過程の条件付分布の問題と、標本路の境界での挙動がその条件付分布に与える影響について考察した。

研究成果の概要（英文）：The method of harmonic transform is a useful one to analyze some properties of Green kernels and diffusion processes. It should be noted that these Green kernels and diffusion processes are minimal. However minimal stochastic processes are not always treated in applied mathematics such as population genetics. In our research, conditional distributions of non minimal generalized diffusion processes and the effect of asymptotic behavior of sample paths near the boundaries on conditional distributions are investigated.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：確率過程論
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：広義拡散過程、広義拡散作用素、境界条件、調和変換、マルコフ性

１．研究開始当初の背景

研究代表者は、2006 年当時、広義拡散作用素の調和変換の研究にかかわり、興味ある研究成果を得ていた。即ち、飯塚勝（研究分担者）他と、一次元広義拡散過程のある種の条件付分布の時間無限大での漸近挙動に関する研究を行い、幾つかの結果を得た。それらを用いて、集団遺伝学（生物集団の進化の機構を数理的に解析する遺伝学の分野）においてこれまでこの漸近挙動が取り扱われなかったモデルも含めて、数多くの集団遺伝学モデル

に対し、特定の遺伝子が集団全体には広がっていないという条件の下で、時間を無限大にした極限における集団の状態の分布関数（条件付漸近分布）の性質を包括的に解析することに成功し、新しい極限状態の観察を可能にした。この研究の契機となったのは、理論集団遺伝学者 Ewens(1973) が取り扱った極めて具体的な集団遺伝学モデル、即ち、突然変異や自然淘汰を考慮しない拡散モデルにおける条件付漸近分布である。突然変異を考慮したモデルに対しても、Ewens の結果と類似した結果が得られることを、2006 年の研究で示した。一方で、調和変換の手法を用いる際には、正則境界で課せられる境界条件の取り扱いを慎重に行う必要のあることも明らかになった。本研究課題では、それまで余り注意を払われなかった広義拡散作用素の調和変換と境界条件の問題を含めて、条件付確率過程の分布に境界の状態が与える影響に焦点をあて、関連する諸問題の解決を目指すこととした。

２．研究の目的

本研究課題の申請時における研究目的は次の通りである。

(1)　集団遺伝学に関連した［0,1］上のある一次元拡散過程Ｄに対して、Ewens(1973) は、標本路が端点 0 に到達する前に端点 1 に到達するという事象で条件付けられた確率過程を考察し、この確率過程も拡散過程であることを示した。両端点は到達可能点であり、そこでは吸収壁境界条件が課せられている。この条件付確率過程はＤの調和変換として表現できることが分かる。しかしながら、集団遺伝学では、正則境界では反射壁境界条件などの他の境界条件が課せられるのが普通である。このように正則境界で反射壁境界条件が課せられた場合に、Ewens により考察された確率過程は拡散過程となるのか。本研究課題で、この問題の解決を目指す。

(2)　正則境界で吸収壁境界条件を課した場合に、消滅測度を伴う広義拡散過程の調和変換が、大域的な性質の保存に対してどのような影響を与えるかという問題に取り組む。この問題の解明は、考察対象となっている広義拡散過程がある広義拡散過程の調和変換として表現できるかという問題の解明につながることが期待できる。このような調和変換として表現できる確率過程のクラスの特徴付けについても考察する。調和変換により、消滅測度を伴う一次元広義拡散作用素は、消滅測度のない一次元広義拡散作用素に変換される。この特性を用いて、一次元広義拡散作用素のクラスを特徴づける様々な条件を導出する。

３．研究の方法

研究の目的で述べた内容に対し、以下の方法で研究を行うこととした。

(1)　様々な境界条件を伴う広義拡散過程の条件付分布の研究

有界閉区間上のブラウン運動に対して両端に反射壁境界条件をおいた場合に、Ewens (1973)が考察した条件付分布がマルコフ過程を導かないことが、ブラウン運動の推移確率密度関数の性質を用いて、先行研究において示されている。広義拡散過程においては、スピード測度に関する推移確率密度関数の存在は知られているが、その具体的な表現は分からない。従って、上記の先行研究で用いた証明方法を用いることができない。また、他の弾性壁境界条件が課せられた場合などにも適用できない。広義拡散過程に共通の性質を見出し、汎用性のある手法を確立し、研究の目的欄の(1)で述べた問題を解決する。

研究の目的の欄で、「集団遺伝学では、正則境界では反射壁境界条件などの他の境界条件が課せられるのが普通である」と書いた。集団遺伝学における様々なモデルに対し種々の境界条件を課した場合の挙動を解析する。

(2)　調和変換の研究

先行研究では、消滅測度を伴わない一次元広義拡散作用素 G に対し、正則境界では吸収壁境界条件を課し、正値優調和関数ｈを用いて G（ｈ・)/ｈで表現される広義拡散作用素を考察した。しかし、微分方程式論も含めて幅ひろい議論を展開する際には、消滅測度のある場合にも、そのｈ変換を考える必要がある。そこで、消滅測度を伴う広義拡散作用素 G に対して、先行研究の結果の見直しを行う。消滅測度を伴う場合であるから、その解析はそれほど容易に進むとは思われない。議論の本質を見るという観点から、正値調和関数ｈを用いて G（ｈ・)/ｈで表現される広義拡散作用素を考察する。この段階では、正則境界に対しては吸収壁境界条件をおく。

(3)　確率論・確率過程論的手法の開発

本研究で取り扱われる条件付分布は、広義拡散過程の到達時間に由来する。このような確率過程論特有の量に由来する分布に対して、解析学的な手法だけでなく、直感的にも理解しやすい確率論的な手法を用いて、研究を進めることは重要である。確率論的手法が

適用できる特性量に対して、解析学的手法では示すことができない性質を導出する。

４．研究成果

研究の目的と研究の方法で述べた内容に対し、以下の研究成果を得た。

(1)　様々な境界条件を伴う広義拡散過程の条件付分布の研究

①　スピード測度関数が右連続かつ増加関数である一次元広義拡散過程のクラスに対して、左境界点より先に右境界点に到達、あるいは、漸近的に到達するという条件のもとで誘導される確率過程（条件付確率過程）の性質を考察した。その結果、右境界点が到達可能で吸収壁となるか、漸近的に到達可能な場合は、誘導された条件付確率過程は再び一次元広義拡散過程となることがわかった。一方、右境界点が到達可能で反射壁か弾性壁となる場合は、誘導された条件付確率過程の確率分布はチャップマン－コルモゴロフの等式をみたさず、したがって、誘導された条件付確率過程はマルコフ過程とならないことがわかった。

②　上で用いた手法は、一般の広義拡散過程に対して適用することはできない。特に、応用上で頻繁に用いられる出生死滅過程は広義拡散過程であるが、そのスピード測度関数は非減少であるが可算個の点を除いて増加とはならないので、これまでに得られた結果を出生死滅過程に適用することはできない。出生死滅過程に対して、左境界点より先に右境界点に到達するという条件のもとで誘導される条件付確率過程の性質を探るために、集団遺伝学における基本的な確率モデルであるモラン・モデルの性質を境界点の性質に注目して考察した。また、集団遺伝学における遺伝子間相互作用を伴う幾つかの多次元確率モデルにおける境界への初期到達時間に関する解析を行った。

③　正則境界で反射壁境界条件を課した場合に、広義拡散過程の標本路が左境界点より先に右境界点に到達するという条件のもとで誘導される条件付確率過程の性質は自明ではない。出生死滅過程から誘導される確率過程を特徴づけるために、その推移確率について考察した。推移確率の表現において、元の出生死滅過程の推移確率が重要な役割を果たすことが分かり、様々な境界条件のもとで、有限状態空間の出生死滅過程の推移確率密度を決定した。そこで用いられた手法は、有限状態空間の出生死滅過程だけでなく、離散状態空間の出生死滅過程に対しても適用できることが判明した。

④　正則境界で反射壁境界条件を課した場合に、広義拡散過程の標本路の端点への到達時刻を用いて表現される或る条件付分布は、新たなマルコフ過程を導くかという問題を、有限状態空間の出生死滅過程に対して考察した。このような条件付分布は、正則境界で吸収壁境界条件を課した場合には、広義拡散過程の調和変換が施された新たな広義拡散過程の分布に一致することを示し、その生成作用素を決定した。

(2)　調和変換の研究

①　開区間上で定義された一次元広義拡散作用素に対して小摂動性と半小摂動性の概念を考察し、それが、対応する広義拡散過程の境界の状態により特徴付けられることを示した。楕円型偏微分作用素のあるクラスにおいて、小摂動性から半小摂動性が導出されるが、逆は一般には不明である。しかし、本研究で取り扱った一次元広義拡散作用素に対しては両者の概念が同値であることを証明した。また、スピード測度に関する推移確率密度関数の内在的超縮小性についても考察した。内在的超縮小性から小摂動性が導かれるが、逆は成立しない。内在的超縮小性のための十分条件を、尺度とスピード測度により与え、逆が成立しない限界の条件を示した。更に、調和変換を考察することにより、この条件の適用できるクラスを拡張した。

②　正則境界で吸収壁境界条件を課した場合に、消滅測度を伴う一次元広義拡散過程の調和変換について考察した。本質的に異なる拡散過程に変換されるか否かという問題が、変換前の拡散過程の大域的な性質に依存していることを明らかにした。

(3)　確率論・確率過程論的手法の開発

①　必ずしもトランジティブでないグラフでのパーコレーションの無限クラスターの一意性が、どのような条件下で成り立つかを研究した。特にG×Zのタイプ（あるグラフと１次元格子Zとの直積）のグラフにおいては、無限クラスターの個数は０、１、∞のいずれかであることがわかるが、Gがシェルピンスキー・ガスケットのように、グラフが有限分岐的かつある種の対称性を持つ場合は、無限クラスターの一意性が成り立つことがわかった。

②　シェルピンスキー・ガスケットと呼ばれるフラクタル格子グラフにおける全域木の一様分布の持つ性質について調べた。この極

限分布はある多状態分枝過程として計算することができ、同時にシェルピンスキー・ガスケット上のループ除去ランダムウォークの変位の指数も求めることができた。シェルピンスキー・ガスケットにおいて、全域木の一様分布、および最小全域木を与える確率分布の極限測度の統計的性質を調べ、これらの２つの極限測度は別のクラスに属することを、対応する非交差ウォークの指数を具体的に計算することで示した。

③　カードゲームの「神経衰弱」をモデル化した確率ゲームにおける最適戦略について調べ、カード組数の奇偶によって先攻後攻の優劣が変化することを示した。

④　一次元広義拡散過程と球面ブラウン運動の斜積確率過程とその時間変更過程を考察した。斜積は、一次元広義拡散過程の局所時間を用いて表現される正値線型汎関数に基づいて定義されるものである。この正値線型汎関数を与える測度の区間端点での挙動と一次元広義拡散過程の端点での状態に応じて、斜積確率過程の標本路が状態空間の「極」から激しくスピンしながら状態空間に流れ込む。このような状況を、斜積拡散過程の半群の「極」の近傍での挙動から導出した。また、斜積確率過程の時間変更過程についても、同様の現象が生じることを証明した。時間変更過程の状態空間は、必ずしも連結ではなく、有限個または可算無限個の連結集合の和集合として表現される。従って、その標本路は、連結集合の「端」の部分では、ジャンプをしながら状態空間を動く。このようなマルコフ過程を表現するために、ディリクレ形式が用いられるが、上記の斜積確率過程の時間変更過程に対して、一次元拡散過程の到達確率の分布を用いて、ディリクレ形式の具体的な表現も決定した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Tomoko Takemura, Matsuyo Tomisaki, Feller property of skew product diffusion processes, Osaka Journal of Mathematics (掲載決定), 査読有

②Masaru Iizuka, Matsuyo Tomisaki, Transition probability densities of birth and death processes with finite state space, Annual Reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University, Vol.25, 271-284 (2010), 査読有

③ Masato Shinoda, Winning strategy of the memory game, IPSJ Symposium Series, 181-188 (2008), 査読有

④ Motoshi Ichinose, Masaru Iizuka, Tomoyuki Kado, Masasuke Takefu, Compensatory evolution in diploid population, Theoretical Population Biology, Vol.74, 199-207 (2008), 査読有

⑤ Masaru Iizuka, Miyuki Maeno, Matsuyo Tomisaki, Conditional distributions which do not satisfy the Chapman-Kolmogorov equation, Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol.59, 971-983 (2007), 査読有

⑥ Matsuyo Tomisaki, Intrinsic ultracontractivity and small perturbation for one dimensional generalized diffusion operators, Journal of Functional Analysis, Vol.251, 289-324 (2007), 査読有

〔学会発表〕（計７件）

①　飯塚　勝, タンパク質共進化機構の集団遺伝学的考察, 日本生物物理学会第 47 回年会, 2009 年 10 月 30 日, 徳島文理大学（徳島県）

②　篠田正人, Uniform spanning trees and loop-erased random walks on the pre-Sierpinski gasket, 日本数学会, 2009年9月24日, 大阪大学（大阪府）

③　嶽村智子, 富崎松代, h変換された一次元広義拡散過程の大域的性質, 日本数学会, 2009年3月26日, 東京大学（東京都）

④　篠田正人, Winning strategy of the memory game, ゲームプログラミングワークショップ, 2008 年 11 月 9 日, 箱根セミナーハウス（神奈川県）

⑤　篠田正人, 直積グラフにおけるパーコレーション無限クラスターの個数について, 研究集会「大規模作用系の確率解析」, 2008 年 11 月 4 日, 東京大学(東京都)

⑥　Masaru Iizuka, Motoshi Ichinose, Tomoyuki Kado and Masasuke Takefu, Models of Compensatory Molecular Evolution, The XXth International

Congress of Genetics, 2008 年 7 月 14 日, International Congress Centrum (Berlin)

⑦ 篠田正人,
The number of infinite percolation clusters on some graph products, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2007年10月25日, 九州大学西新プラザ(福岡県)

６．研究組織

(1)研究代表者

富﨑　松代 (TOMISAKI MATSUYO)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号：50093977

(2)研究分担者

篠田　正人 (SHINODA MASATO)
奈良女子大学・理学部・准教授
研究者番号：50271044

飯塚　勝 (IIZUKA MASARU)
九州歯科大学・歯学部・准教授
研究者番号：20202830

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：