

平成 22 年 4 月 21 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540131

研究課題名（和文） 超平面配置の統計科学への応用

研究課題名（英文） Application of hyperplane arrangements to statistical science

研究代表者

紙屋 英彦（KAMIYA HIDEHIKO）

岡山大学・大学院社会文化科学研究科・教授

研究者番号：50300687

研究成果の概要（和文）：超平面配置の理論を用いて、統計科学におけるランキングのいくつかの問題を解決した。またそのために、超平面配置の理論自体の拡張も行なった。具体的には、展開モデルと呼ばれるランキングのモデルから生成され得るランキングの集合の数を、次元による制約が最も緩い場合について理論的に求めた。またこの数を数値的に求める際には、有限体法という超平面配置における一般的な方法を用いることになるが、この有限体法自体の拡張を行なった。

研究成果の概要（英文）：We solved some problems about rankings by using the theory of hyperplane arrangements. In the course of the argument, we also generalized a method in the arrangement theory. Specifically, we found the number of ranking patterns generated by the unfolding model when the restriction by dimension is weakest. Moreover, we extended the finite field method to ease the computational burden for solving our ranking problems numerically.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数理統計学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：統計数学

1. 研究開始当初の背景

超平面配置は、現代数学の様々な分野と本

質的に関わっており、重要な研究分野として数学の中では確立している。同時に、超平面

配置は単純に定義される素朴な対象であるため、数学の範囲を越えても、応用上、古くから様々な分野において姿を現す。

統計科学においても、展開モデル（理想点モデルとも呼ばれる）により生成されるランキングの研究、超平面配置の部屋の集合上のランダム・ウォークの研究、最尤推定の代数的複雑さの観点からの尤度方程式の解の問題の研究などの分野で、超平面配置の理論が本質的に用いられている。また超平面配置と密接に関連した分野である多面体論には、象限確率の問題や、順序制約下の統計的推論の問題など、統計科学の様々な問題が関連してくる。

超平面配置の理論を応用することにより、ランキングと関連した統計科学の問題のうちこれまで未解決であったもののいくつかを解決出来る見込みが大きい。これが、研究開始当初の背景・動機である。

2. 研究の目的

展開モデルにより生成されるランキングの性質については、既に Kamiya and Takemura (1997, 2000, 2005) でいくつかの結果を得ていた。具体的には、与えられた対象の集合により生成されるランキングの集合の濃度や性質については、超平面配置の理論を用いることで問題を解決していた。それに対し、対象の集合自体を動かしたときに、ランキングの集合がどれだけ多様に作り出され得るか、という問題（ランキング・パターンの問題と呼ぶ）は、より難しい。1次元のケースについては、超平面配置の理論を用いることにより、Kamiya, Orlik, Takemura and Terao (2006) で既に解決されていた。しかしそれ以外の場合同じについては、この問題は未解決である。これを解決することを、本研究の主たる目的とした。

またこの問題を解決する際に、有限体法の理論を一般化することが出来れば、計算機による計算量の点で有効である。このようにランキングなどの統計科学の問題に応用するために、超平面配置の理論自体を発展させることも、本研究の目的とした。

3. 研究の方法

展開モデルにより生成されるランキングに関する問題は、適当な整数係数超平面配置の部屋の数を求める問題に帰着することが多い。そのような部屋の数を具体的に求めるためには、超平面配置の特性多項式を具体的に求める必要がある。その際に有効な方法として、有限体法がある。この有限体法をある面で拡張しておくことにより、実際に必要となる計算量を減らすことが出来るようになり、それにより、特性多項式を次元が大きな場合まで具体的に求めやすくなる。この意味での有限体法の拡張を、最初に行なう。

次に、展開モデルのランキング・パターンの問題に取り組む。一般の場合は非常に難しいので、codimension one の場合、つまり次元による制約が最も緩い場合に、ランキング・パターンの問題を解決する。ランキング・パターンの数を具体的に求める際には、先に行なう有限体法の拡張の結果を用いる。

4. 研究成果

本研究の主な成果は、大きく分けて二つに分類出来る。

一つは、一般の整数係数超平面配置に対する有限体法の理論の拡張である。

通常有限体法においては、素数 q に対して、与えられた超平面配置の q -reduction を考え、その補集合の点の数を数える。そしてこれをいくつかの素数 q に対して行ない、補間をすることで元の実超平面配置の特性多項式が求められる。ここではこの q が必ずしも

素数ではなく、一般の正整数であっても、 q -reduction の補集合の点の数を数えることが出来ることに着目した。そして単因子論を用いることにより、正整数 q に対する q -reduction の補集合の濃度が q の quasi-polynomial となることを示した。さらにこの quasi-polynomial の constituents のうち、周期と互いに素な q に対するものが、元の超平面配置の特性多項式と一致することも示した。また q -reduction の intersection poset の周期性も示した。これらの結果は、central な超平面配置に対しては H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers として、また non-central な超平面配置に対しては H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers としてまとめられている。

具体的に与えられた超平面配置に対し、その特性多項式を実際に求める際に、ここで得た結果は従来の有限体法よりも、計算量の観点からより有効である。この結果は一般的な結果であるが、特に統計科学において現れる様々な超平面配置に対しても、もちろん適用可能である。実際、以下で述べるもう一方の成果であるランキング・パターンの問題においても、この結果を有効に用いた。

主な成果のもう一方は、codimension one の展開モデルにおけるランキング・パターン問題の解決である。

展開モデルにおいて、与えられた対象たちの集合から生成されるランキングたちの集合を、その対象たちの集合のランキング・パターンと呼ぶ。自明でない最大次元の場合を codimension one のケースと呼び、この場合に可能なランキング・パターンの数を求める

問題を考察し、以下のように解決した。

まず、codimension one の展開モデルのランキング・パターンが、braid arrangement の slice によるランキング・パターンとして実現されることを示した。そして braid arrangement の slices によるランキング・パターンたちの全体が、ある整数係数超平面配置 (all-subset arrangement と呼んだ) の部屋たちの全体と 1 対 1 に対応することを示した。その上で、braid arrangement の slices によるランキング・パターンたち (すなわち all-subset arrangement の部屋たち) のうち、codimension one の展開モデルのランキング・パターンと対応するものではないものを特定した。それにより、codimension one の展開モデルのランキング・パターンの数を求めることが出来た。

この数は、理論的にはすべての次元の場合に all-subset arrangement の部屋の数を用いて表されたが、この部屋数を数値的に求めるためには、各次元ごとに all-subset arrangement の特性多項式を具体的に求める必要があった。主たる成果の一つ目として上述した有限体法の拡張の結果を用いることにより、これらの特性多項式を (計算量の点で可能な範囲で) 実際に求めることが出来た。ここで得られた結果は、Ranking patterns of unfolding models of codimension one, H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, METR 2010-05 としてまとめられている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers, Annals of Combinatorics, 査読有, to

appear.

② H. Kamiya, A. Takemura and N. Tokushige, Application of arrangement theory to unfolding models, Mathematical Engineering Technical Reports, 査読無, 2010, 2010-07.

③ H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, Mathematical Engineering Technical Reports, 査読無, 2010, 2010-05.

④ H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements, Progress in Mathematics, 査読有, Vol. 283, 2009, 177-190.

⑤ H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, Journal of Algebraic Combinatorics, 査読有, Vol. 27, 2008, 317-330.

[学会発表] (計 7件)

① 紙屋英彦, ランキングと超平面配置, 北海道大学数学連携研究センターシンポジウム「応用特異点論の現状と展望」, 2009年3月16日, 北海道大学.

② Hidehiko Kamiya, Rankings and arrangements, Workshop on “Computational Algebraic Statistics, Theories and Applications” (a satellite meeting of IASC2008), 2008年12月10日, Kyoto University Hall.

③ 紙屋英彦, 有限体法 (ノンセントラル・ケース), 科学研究費「計算代数統計学の展開」研究集会, 2008年6月28日, 東京大学.

④ 紙屋英彦, 超平面配置とランキング, 科学研究費「計算代数統計学の展開」研究集会 2007年10月27日, 愛知県豊橋市 ホテル日航豊橋.

⑤ 紙屋英彦, 竹村彰通, 寺尾宏明, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, 日本数学会 2007年度秋季総合分科会, 2007年9月22日, 東北大

学.

⑥ 紙屋英彦, 特性多項式と有限体法, Seminar on Combinatorics and Representation (CORE) Theory, 2007年7月26日, 岡山大学理学部数学教室.

⑦ 紙屋英彦, 有限体法と Ehrhart 多項式, 科学研究費「計算代数統計学の展開」研究集会, 2007年6月23日, 東京大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

紙屋 英彦 (KAMIYA HIDEHIKO)
岡山大学・大学院社会文化科学研究科・教授
研究者番号: 50300687

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

竹村 彰通 (TAKEMURA AKIMICHI)
東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授
研究者番号: 10171670

寺尾 宏明 (TERAO HIROAKI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 90119058