

平成22年 5月31日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540133

研究課題名（和文） クーロン波動関数の流体力学への応用

研究課題名（英文） Applications of Coulomb wave functions to fluid mechanics.

研究代表者

西山 高弘 (NISHIYAMA TAKAHIRO)

山口大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：60333241

研究成果の概要（和文）：クーロン波動関数は主に量子力学の散乱理論で用いられる合流型超幾何関数の1つであり、これを流体力学の分野に応用することを目的として研究を行った。まず、軸対称定常オイラー流のストークス流れ関数であり、かつクーロン波動関数で表されるものが基底となっている直交級数の収束性について調べ、フーリエ級数やフーリエ・ベッセル級数と同様の収束性を証明した。また、複素変数と複素パラメータをもつクーロン波動関数の漸近形を用い、円管ポアズイユ流に対する微小攪乱の複素位相速度の分布について解析的な説明をすることに成功した。

研究成果の概要（英文）：Coulomb wave functions belong to a family of confluent hypergeometric functions and are mainly used in scattering theories in quantum physics. The aim of the research is to apply them to fluid mechanics. First, the convergence of an orthogonal series whose bases are Stokes stream functions of axisymmetric stationary Euler flows and represented with a Coulomb wave function is studied. As a result, a convergence theorem analogous to that of the Fourier or the Fourier-Bessel series is proved. Next, the distribution of complex phase velocities for small disturbances to pipe Poiseuille flow is analytically explained by using asymptotic forms of a Coulomb wave function with a complex variable and a complex parameter.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：クーロン波動関数，合流型超幾何関数，オイラー方程式，円管ポアズイユ流

1. 研究開始当初の背景

クーロン波動関数は主に量子力学の散乱理論で用いられてきた合流型超幾何関数の1つで、近年では天体物理学のブラックホールの理論にも応用されている。流体力学の分野では、C. L. Pekeris [Proc. Nat. Acad. Sci. USA vol. 34 (1948) p. 285] が円管を流れる粘性流体の運動(円管ポアズイユ流)の線形安定性問題に関連して、変数とパラメータが複素数のクーロン波動関数を初めて用いた。これとは別に、私 [Int. J. Math. Math. Sci., vol. 2005, p. 3319] は、定常オイラー方程式(非粘性非圧縮性流体の定常運動を記述する方程式)の軸対称解のストークス流れ関数を各基底とする直交関数系がクーロン波動関数を用いて表されることを見いだした。更に、私 [Z. Angew. Math. Phys. vol. 58 (2007) p. 68] は、定常オイラー方程式の軸対称解のストークス流れ関数で、クーロン波動関数を含むものが、ある積分変換とその逆変換の核となっていることを示した。

2. 研究の目的

(1) クーロン波動関数を含む直交級数展開の収束性に関する研究。

「1. 研究開始当初の背景」で述べた、クーロン波動関数で記述される定常オイラー方程式の解が直交関数系を成すことは、ヒルベルト・シュミットの理論により示せる。では、連続とは限らない関数を級数展開し、再合成したときの収束先は、元の関数とどのような関係にあるだろうか？ この疑問に対し、クーロン波動関数の諸性質を用いて解答を得ることを目的とする。

(2) 円管ポアズイユ流の線形安定性問題の再検証

円管ポアズイユ流の線形安定性問題を変数とパラメータが複素数のクーロン波動関数を用いて調べることは、「1. 研究開始当初の背景」で挙げた C. L. Pekeris や T. Sexl & K. Spielberg [Acta Phys. Austriaca vol. 12 (1958) p. 9] によりなされたが、彼等の論文の後に判明した、クーロン波動関数を含む合流型超幾何関数に関する事実は少なくない。そこで、その事実を用いた彼等の結果の再検証を行い、新たな知見を得ることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) クーロン波動関数を含む直交級数展開の収束性に関する研究。

「2. 研究の目的」の(1)で述べた直交級数展開の収束性を調べる1つの方法として、フーリエ・ベッセル級数展開の収束性を証明するときのように、クーロン波動関数を複素領域に拡張して留数定理を使う方法が考えられる。しかし、クーロン波動関数中のガンマ関数が負の実軸上に極をもつことから難しさが生じるので、これを解決する必要がある。

(2) 円管ポアズイユ流の線形安定性問題の再検証

変数と2つのパラメータ、合わせて3つのどれか1つの絶対値が大きい場合における合流型超幾何関数の漸近形は古くから知られていたが、粘性流体のレイノルズ数が大きいときは、変数とパラメータ1つの合わせ

で2つがともに大きくなる。このときの漸近形が H. Skovgaard [Uniform Asymptotic Expansions of Confluent Hypergeometric Functions and Whittaker Functions. 1966] により得られていて、ベッセル関数またはエアリー関数といった、性質が比較的よく知られている特殊関数で表される。これを用い、円管ポアズイユ流の線形安定性問題を検証する。

4. 研究成果

(1) クーロン波動関数を含む直交級数展開の収束性に関する研究。

級数展開したものを再合成すると、フーリエ級数やフーリエ・ベッセル級数と同様に、元の関数の不連続点では、右側極限と左側極限の中間値に収束することを証明した。「3. 研究の方法」で挙げた、ガンマ関数の極による難しさは、正則クーロン波動関数と非正則クーロン波動関数をうまく組み合わせることで回避できた。

(下記「5. 主な発表論文等」の雑誌論文②を参照)

(2) 円管ポアズイユ流の線形安定性問題の再検証

円管ポアズイユ流に加えられた微小攪乱の複素位相速度は、第4象限にY字状に分布することが数値実験により知られているが、これを解析的に説明することに成功した。また、個々の複素位相速度の値が得られる近似式を導き、いくつかの値を P. J. Schmid & D. S. Henningson [J. Fluid Mech. Vol. 277 (1994) p. 197] が攪乱方程式を直接計算して

得た値と比較し、よく一致していることを示した。

(下記「5. 主な発表論文等」の雑誌論文①を参照)

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

① Takahiro Nishiyama, Distribution of complex phase velocities for small disturbances to pipe Poiseuille flow, Journal of Fluid Mechanics, vol. 620, pp. 299-312, 2009年, 査読有

② Takahiro Nishiyama, Application of Coulomb wave functions to an orthogonal series associated with steady axisymmetric Euler flows, Journal of Approximation Theory, vol. 151, pp. 42-59, 2008年, 査読有

[学会発表] (計0件)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]
ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西山 高弘 (NISHIYAMA TAKAHIRO)
山口大学 ・ 大学院理工学研究科 ・ 准教授
研究者番号 : 60333241

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし