

平成22年6月1日現在

研究種目： 基盤研究（C）

研究期間： 2007～2009

課題番号： 19540135

研究課題名（和文） 微分多様体上での有限要素解析の展開

研究課題名（英文） Study of finite element analysis on differential manifolds

研究代表者

土屋 卓也（TSUCHIYA TAKUYA）

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号： 00163832

研究成果の概要（和文）：

この研究では、領域の変動が、その領域上で定義されている楕円型微分方程式の境界値問題の解に、どのような影響を及ぼすかについて調べた。特に、境界値問題の解を用いて定義される汎関数について、領域の摂動に関する第一変分、第二変分を計算する方法を確立した。その結果を用いて、有界領域上の Green 関数の領域の摂動に関する古典的な Hadamard の変分公式を、簡便に計算する方法を発見した。また、「ダム問題」と呼ばれる自由境界問題について、解を制御する変分原理の領域の変動に関する第一変分、第二変分を計算し、さらに第一変分を用いた反復解法を新たに提案した。

研究成果の概要（英文）：

Suppose that we are interested in an elliptic boundary value problem defined on a bounded domain. In this research, we consider effects of perturbation of the domain to the solution of the boundary value problem. In particular, we have established a scheme of computing the first and second variations of functionals defined with the solution of BVP. Using the scheme, we have found an alternative proof of the classical Hadamard's variational formula. We also apply the scheme to the research of a free boundary problem called the "dam problem". We have obtained the first and second variation of the functional which governs the dam problem. Using the obtained first variation, we propose a new iterative algorithm for numerical solution of the dam problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野： 数値解析学

科研費の分科・細目： 数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード： 数値解析学、楕円型境界値問題、自由境界問題、Hadamard 変分

1. 研究開始当初の背景

20世紀に、数学的に厳密な偏微分方程式の理論が大発展した。これまでに膨大な量の成果が蓄積され、人類共通の財産となっている。しかし多くの場合、偏微分方程式を考えている領域はあらかじめ与えられており、また時間発展のさいにも変化しないと仮定されている。しかし、工学や物理学などで現れる現実の問題では、そもそも方程式が定義される領域が不明の場合や、時間とともに領域が変化していく場合が多い。そのような場合を扱えるような偏微分方程式の理論は、21世紀初頭の現在でも驚くほど未整備であり、未解決の問題がたくさんある。

2. 研究の目的

(1) 上記のような状況をふまえ、この研究の目的は、領域が摂動を受けて境界が少し変形した場合に、楕円型の境界値問題の解がどのような影響を受けるかを、定量的に調べることであった。特に、境界値問題の解を用いて定義されている汎関数の、領域の摂動に関する第一変分、第二変分を計算することを試みた。

(2) この研究のもう一つの目的は、自由境界問題に対する反復解法の研究である。自由境界問題に対するアプローチとして、レベルセット法と反復解法の2つが主に挙げられる。レベルセット法は理論的な解析に向いていて、数学的に厳密な理論ではレベルセット法が用いられることが多い。それに対して工学の現場では、多くの場合に、より直感的な反復法が用いられる。しかし、反復法の収束や誤差解析など、反復法の挙動を数学的に厳密に調べた研究は、これまでほとんどなかった。また、自由境界問題に対する反復法においては、考えている領域の境界を、何らかのアルゴリズムにより少しずつ変化させていく。つまり、よりよい反復スキームを設計するために、自由境界問題を支配する微分方程式の解の境界の摂動による影響を調べる必要が出てくる。つまり、(1)の研究の成果がこの研究へ応用できるであろうことが、強く期待できる。

3. 研究の方法

領域の摂動より境界値問題のさまざまなデータが影響を受けるが、それを固定された領域に引き戻してやる。つまり、「領域の摂動」を、「固定された領域上のデータの変動」に変換してやる。こうすると、従来の様々な手法が使えるようになる。そのさい重要なのは、変換のしかたに二通りあるということである。一つのやりかたは、領域上の1点に注目するというもので、もう一つのやり方は変換が生成する「流れ」に乗って考えるという者である。流体力学からの比喻で、前者を

「Euler 的」(Eulerian)と呼び、後者を、「Lagrange 的」(Lagrangian)と呼ぶ。この2つの見方をうまく組み合わせることで、様々な解析が可能になった。また、古典的かつ Euler 的な Liouville の定理とその拡張も、重要な道具である。

4. 研究成果

得られた研究成果は、以下の通りである。

(1) 領域の変動に関する Liouville の定理を用いて、領域の摂動に関する Green 関数の第一変分、いわゆる **Hadamard の変分公式**の非常に簡明な証明を発見した。また、Liouville の定理を2階微分の場合に拡張することにより、領域の摂動に関する Green 関数の第二変分も計算することができた。これは、Garabedian-Schiffer の1953年の結果の拡張になっている。

(2) **ダム問題**と呼ばれる地下水の流れの表面を求めるという、自由境界問題を考察した。ダム問題を支配する汎関数を考え、領域の摂動によるその汎関数の第一変分、第二変分を求めることに成功した。さらに、求めた第一変分を用いて、最適設計の分野で名古屋大学の畔上教授が開発した力法(traction method)と呼ばれるアルゴリズムを、ダム問題の反復解法として適応してみた。数値実験の結果、非常に良好な収束を観測した。現在、この反復解法の挙動について、詳しい数学解析を考察しているところである。

(3) これまで述べてきた研究とは別に、リーマン多様体上の偏微分方程式に対する有限要素法の研究も行ってきた。それに関しては、次のような結果を得た。まず、平面上の単位円から、平面上に与えられた Jordan 閉曲線の外部の領域への等角写像を、区分的1次有限要素法で求める方法を考えた。そのために、まず平面から2次元球面への**立体射影**(stereographic projection)を考える。立体射影は平面から球面への等角写像であるので、非有界な Jordan 外部領域は球面上の有界領域に等角に移される。よって、単位円から球面上への単連結有界領域への等角写像の有限要素近似が構成できれば、それと立体射影を組み合わせることにより、単位円から Jordan 外部領域への等角写像が近似できることになる。

単位円から平面上の有界な Jordan 領域への等角写像が満たす変分原理は、単位円周を Jordan 閉曲線に単調に移すような写像の中で Dirichlet 積分の値が最小になるものであった。このいわゆる **Dirichlet の原理**は、単位円を2次元リーマン多様体上の単連結領域に移すような等角写像についても同様に成り立つことを確認し、実際に区分的1次有

限要素法の収束証明も得た。また、実際に、単位円から球面上の単連結領域への等角写像を計算するプログラムも作成した。

もちろんこのプログラムは、リーマン多様体上の単連結領域を三角形分割することを使用できる。現在、リーマン多様体の単連結領域上で定義された楕円型境界値問題に対する有限要素近似について研究を進めているところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 31 件)

[1] N. Kavallaris, T. Suzuki: An analytic approach to the normalized Ricci flow-like equation, to appear in *Nonlinear Analysis*. 掲載決定、査読有

[2] T. Suzuki, S. Tasaki: Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term, *Nonlinear Analysis* **71** (2009) 1329-1349. 査読有

[3] T. Suzuki: Semilinear parabolic equation on bounded domain with critical Sobolev exponent, *Indiana University Mathematics Journal*, **57**(2008) 3365-3396. 査読有

[4] T. Suzuki, F. Takahashi: Capacity estimate for the blow-up set of parabolic equations, *Math. Z.* **259** (2008) 867-878. 査読有

[5] Y. Naito, T. Suzuki: Existence of type II blowup solutions for a semilinear heat equation with critical nonlinearity (with Y. Naito), *J. Differential Equations* **232** (2007) 176-211. 査読有

[6] H. Ohtsuka, T. Suzuki: Blowup analysis for SU(3) Toda system, *J. Differential Equations* **232** (2007) 419-440. 査読有

[7] K. Sawada, T. Suzuki, F. Takahashi: Mean field equation for equilibrium vortices with neutral orientation, *Nonlinear Analysis* **66** (2007) 509-526. 査読有

[学会発表] (計 18 件)

[1] 土屋 卓也: Topics on Finite Element Methods on Riemannian Manifolds、International Workshop on Numerical

Verification and its Application (INVA2010)、Hotel Lido Azzurro、`Annex`、東京都八丈島 (2010年3月14日)

[2] 土屋 卓也: 幾何的問題に対する有限要素解析の話題、応用数学に関する愛媛ワークショップ、愛媛大学理学部数学科(2010年2月21日)

[3] 土屋 卓也: Hadamard 変分入門 -- その概念と計算法 (招待講演)、CoMFOs ワークショップ「変分法と領域摂動」、神戸インスティテュート(2010年2月12日)

[4] 土屋 卓也: 微分多様体上での非圧縮性粘性流体の方程式とその数値計算について、研究集会「数値解析の現状と展望」、公立ほこだて未来大学(2009年11月22日)

[5] 土屋 卓也: An Iterative Scheme for a Free Boundary Problem Defined with Hadamard Variation, Dagstuhl Seminar 09471, "Computer-assisted proofs - tools, methods and applications", Dagstuhl, Germany (2009年11月19日)

[6] 土屋 卓也: An iterative scheme for a free boundary problem defined with Hadamard variation、応用数学に関する愛媛ワークショップ、愛媛大学理学部数学科(2009年7月3日)

[7] 土屋 卓也: An Iterative Scheme for a Free Boundary Problem Defined with Hadamard Variation、Invited Workshop: [Verified Computation of Solutions for PDE and Related Topics] in International Conference on Engineering and Computational Mathematics (ECM2009)、香港理工大学 (Hong Kong Polytechnic University) (2009年5月28日)

[8] 土屋 卓也: Hadamard 変分とその応用、藤野精一先生を偲ぶ研究集会「計算数学・情報数学の現状と展望」、九州大学情報基盤研究開発センター (2009年4月27日)

[9] 鈴木 貴、土屋 卓也: Hdamad's Variation and its Applications to the Dam Problem International Workshop on Numerical Verification and its Application 2009、Hotel Breeze Bay Marina 沖縄県宮古島市 (2009年3月27日)

[10] 鈴木 貴、土屋 卓也: Hadamard 変分を用いた自由境界問題のための反復解法、2008

年度 応用数学合同研究集会、龍谷大学瀬田
キャンパス (2008年12月17日)

[11] 土屋 卓也 : Hadamard 変分とその応用、
応用数学に関する愛媛ワークショップ、愛媛
大学理学部数学科 (2008年11月29日)

[12] 鈴木 貴、土屋 卓也 : Hadamard 変分を
用いた自由境界問題のための反復解法、基盤
(S)合同研究集会「流れ問題のための高品質
数値解法と計算機援用解析学」、KKR ホテル金
沢 (2008年11月18日)

[13] 鈴木 貴、土屋 卓也 : Hadamard 変分と
その応用、環瀬戸内応用数理研究部会 第 12
回シンポジウム、山形大学理学部 (2008年
10月12日)

[14] 土屋 卓也 : The Hadamard Variation of
the Dam Problem and Its Applications、2008
International Workshop on Numerical
Verification and its Applications (INVA
2008)、東京第一ホテル オキナワグランメー
ルリゾート (2008年3月2日)

[15] 鈴木 貴、土屋 卓也 : A Simple
Derivation of Hadamard's Variational
Formula、2007 年度 応用数学合同研究集会、
龍谷大学瀬田キャンパス (2007年12月18
日)

[16] 土屋 卓也 : A Simple Derivation of
Hadamard's Variational Formula and Its
Application to the Dam Problem (招待講演)、
第7回 CoMFoS ワークショップ、広島国際学
院大学 (2007年11月26日)

[17] 土屋 卓也 : p-version 有限要素法のプ
ログラミング -- チュートリアル、研究集
会 : 「流れ問題のための高品質数値解法と精
度保証計算」、島根県松江市島根県民会館
(2007年11月20日)

[18] 土屋 卓也 : A Simple Derivation of
Hadamard's Variational Formula and Its
Application to the Dam Problem、応用数学
に関する愛媛ワークショップ、愛媛大学理学
部数学科 (2007年11月17日)

[その他] ホームページ等

土屋 卓也 :

[http://daisy.math.sci.ehime-u.ac.jp/use
rs/tsuchiya/](http://daisy.math.sci.ehime-u.ac.jp/users/tsuchiya/)

鈴木 貴 :

<http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/suz>

uki/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土屋 卓也 (TSUCHIYA TAKUYA)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号 : 00163832

(2) 研究分担者

鈴木 貴 (SUZUKI TAKASHI)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号 : 40114516

大塚 寛 (OHTSUKA HIROSHI) (H19~H20)

愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号 : 30203829